

Capítulo 1

Transformadas de Sinais Não-Discretos

1.1 Convoluções

Seja um operador (ou filtro) L que recebe um sinal unidimensional $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e retorna um novo sinal unidimensional $(Lf)(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 1.1 L é linear se

$$L\{f + \lambda.g\}(x) = Lf(x) + \lambda.Lg(x)$$

para quaisquer sinais f e g e qualquer constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2 L é invariante por translações se

$$L\{f(x - \alpha)\} = (Lf)(x - \alpha)$$

para qualquer sinal f e qualquer constante $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se definirmos o operador translação dado por $T_\alpha g(x) = g(x - \alpha)$ então esta definição equivale a

$$L \circ T_\alpha = T_\alpha \circ L$$

Filtros lineares invariantes por translações são muito comuns em processamento de sinais, e portanto merecem uma caracterização mais explícita. Para tanto, utilizaremos uma “função” bem conhecida em processamento de sinais.

Definição 1.3 A função delta de Dirac (também denominada impulso unitário) é a função com a propriedade de amostragem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \delta(u) du = f(0) \quad \text{para qualquer } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

que também satisfaz

$$\delta(x) = 0 \text{ para qualquer } x \neq 0$$

A definição acima não é rigorosa; de fato, estritamente falando, é impossível definir uma função $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a definição acima. No entanto, é possível definir “funções generalizadas” tal como δ acima em Análise Funcional¹ e, por incrível que pareça, tais “funções” podem ser operadas da maneira usual. Note que em particular tomando $f \equiv 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) \, du = 1$$

Portanto, por assim dizer, a função delta é nula em qualquer ponto exceto na origem, onde seu valor é infinito o suficiente para que a área sob seu gráfico seja exatamente 1.

Note que uma simples mudança de variáveis nos dá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \delta(x-u) \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-v) \delta(v) \, dv = f(x-0) = f(x)$$

e as funções $\delta_u(x) = \delta(x-u)$ formam uma base natural do espaço de funções; para tanto, leia a expressão acima : $f(x)$ é um vetor que pode ser decomposto como uma combinação linear (não uma soma, mas uma integral) dos vetores $\delta_u(x)$, cada um com coeficiente dado por $f(u)$.

Proposição 1.4 *Toda transformação linear L invariante por translações é dada por uma convolução*

$$(Lf)(x) = (f * h)(x) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) h(x-u) \, du$$

onde $h = L\delta$ é a resposta de L ao impulso unitário.

Demonstração. De fato, seja $h(x) = (L\delta)(x)$. Como L é linear

$$\begin{aligned} (Lf)(x) &= L \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \delta(x-u) \, du \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} L\{f(u) \delta(x-u)\} \, du = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) L\{\delta(x-u)\} \, du \end{aligned}$$

e portanto, usando a invariância por translações

$$(Lf)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) (L\delta)(x-u) \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) h(x-u) \, dx = (f * h)(x)$$

¹A idéia da Análise Funcional é definir $\delta(x)$ como o limite de uma sequência de funções $f_n(x)$, todas elas positivas, satisfazendo $\int f_n(x) \, dx = 1$ e com suportes cada vez menores com interseção $\{0\}$. Tal limite não existe no sentido clássico, mas pode ser bem definido num espaço de funcionais que inclui de maneira natural o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para o leitor interessado, recomendamos [1].

■ A função $h = L\delta$ é chamada *função de espalhamento pontual* da transformação linear L . Frequentemente, usaremos a notação $L_h f = f * h$.

Dados dois sinais quaisquer, nem sempre a convolução entre eles está bem definida. No entanto, se nos limitarmos a sinais de quadrado integrável, isto é, tais que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|^2 du < +\infty$$

então a integral da convolução converge. Mais ainda, não é difícil provar as seguintes propriedades da convolução

Proposição 1.5 *Dados sinais f , g e h de quadrado integrável*

$$\begin{aligned} f * g &= g * f \\ (f * g) * h &= f * (g * h) \\ f * \delta &= f \\ \frac{d(f * g)}{dx} &= \frac{df}{dx} * g = f * \frac{dg}{dx} \end{aligned}$$

sendo esta última expressão válida sempre que as derivadas envolvidas forem válidas.

Comentário 1.6 *Note que muitas funções que não são diferenciáveis passam a ter derivadas quando introduzimos funções generalizadas (como a função delta de Dirac). Por exemplo, a função degrau unitário*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

passa a ter como derivada a função delta

$$u'(x) = \delta(x)$$

Estas “novas derivadas” têm as mesmas propriedades das derivadas “usuais”.

1.2 Transformada de Fourier

Uma boa maneira de entender uma transformação linear é estudar a sua diagonalização. Se $\{\delta_\alpha\}$ é uma base do espaço de funções, que outra base diagonalizará a convolução? Em outras palavras, que vetores são autovetores da convolução?

Se estendermos o nosso espaço de funções para incluir funções complexas, a resposta é surpreendente.

Proposição 1.7 *A função $e_w(x) = e^{2\pi i w x}$ é um autovetor do operador L_h (qualquer que seja h).*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} L_h e_w(x) &= h * e_w = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{2\pi i w(x-u)} du = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i w u} h(u) du \right) \cdot e^{2\pi i w x} = \hat{h}(w) e_w(x) \end{aligned}$$

mostra que e_w é um autovetor com autovalor dado pela expressão

$$\hat{h}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-2\pi i w u} du$$

■

Note que a escolha de uma convolução (de um h) não muda os autovetores que são sempre os mesmos e_w , mas corresponde apenas a uma escolha dos autovalores $\hat{h}(w)$. A função $\hat{h}(w)$ é chamada *função de transferência* do filtro L_h .

Assim, a operação $L_h f = h * f$ pode ser realizada da seguinte forma (novamente, compare esta descrição às transformações lineares em \mathbb{R}^n):

- Decomponha f na base e_w ; neste contexto, ao invés da combinação linear usual com um somatório, temos

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e_w(x) dw$$

onde os coeficientes $\hat{f}(w)$ de cada vetor e_w têm de ser determinados de alguma forma;

- Multiplique cada $\hat{f}(w)$ (que é o coeficiente do vetor e_w) pelo autovalor correspondente $\hat{h}(w)$;
- Reconstitua a combinação linear para obter $L_h f$

$$L_h f = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(w) \hat{f}(w) e_w(x) dw$$

E o nosso grande problema é: como obter os tais $\hat{f}(w)$? Felizmente, podemos definir neste espaço de funções o seguinte produto interno entre duas funções f e g

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \overline{g(u)} du$$

Note que a definição acima satisfaz todas as propriedades usuais de um produto interno (lembrando que $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$).

Afirmção 1.8

$$\langle e_{w_1}, e_{w_2} \rangle = \delta(w_1 - w_2)$$

Esta afirmação não pode ser demonstrada apenas com o material que expusemos até aqui. De fato, o leitor que tentar prová-la diretamente de nossas definições encontrará integrais divergentes que não podem ser resolvidas com o cálculo tradicional. No entanto, este resultado pode ser entendido da seguinte forma: duas funções do tipo $e_{w_1}(x) = e^{2\pi i w_1 x}$ e $e_{w_2}(x) = e^{2\pi i w_2 x}$ não se correlacionam, a menos, é claro, que $w_1 = w_2$ (caso em que elas se correlacionam e **muito**).

Mais importante, esta afirmação diz que a base formada pelos vetores e_w é ortogonal com este produto interno! Assim, os $\hat{f}(w)$ que queremos serão simplesmente a projeção do vetor f na direção de e_w , isto é

$$\hat{f}(w) = \langle f, e_w \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi i w u} du$$

Definição 1.9 A Transformada de Fourier de uma função $f(t)$ é dada por

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi i w u} du$$

sempre que esta integral for válida.

Note que a notação apresentada para a função de transferência \hat{h} é consistente com esta definição.

Proposição 1.10 (Transformada de Fourier Inversa) É possível decompor uma função $f(x)$ como uma “combinação linear” dos vetores e_w da seguinte forma

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{2\pi i w x} dw$$

Demonstração. Usando a definição de \hat{f} e a afirmação 1.8 com e_x e e_u

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{2\pi i w x} dw &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi i w u} e^{2\pi i w x} du dw = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i (x-u)w} dw \right) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \delta(x-u) du = f(x) \end{aligned}$$

■

Definição 1.11 A Transformada Inversa de Fourier de um sinal $g(w)$ é denotada por

$$\check{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(w) e^{2\pi i w x} dw$$

Corolário 1.12 *A Transformada Inversa de Fourier nada mais é do que a Transformada de Fourier de um sinal “refletido”, isto é, dada $g(w)$*

$$\check{g} = \widehat{g(-w)}$$

ou em outras palavras, dada $f(x)$,

$$\widehat{\check{f}}(x) = f(-x)$$

Uma maneira comum de encarar a Transformada de Fourier em processamento de sinais: $\hat{f}(w)$ mede o quanto de uma frequência w está “presente” no sinal $f(x)$. De fato, o sinal $e_w(x) = e^{2\pi i w x}$, cuja parte real é $\cos(2\pi w x)$, é o sinal “puro” de frequência w e $\hat{f}(w)$ é o peso de e_w na reconstrução de $f(x)$. Por esse mesmo motivo, diz-se que $f(x)$ é a representação de f no domínio do tempo ou domínio do espaço, enquanto $\hat{f}(w)$ é a representação do mesmo sinal no domínio da frequência.

Note também como a intensidade da frequência w em $L_h f$ é $\hat{f}(w)\hat{h}(w)$, isto é, há um ganho de $|\hat{h}(w)|$ (possivelmente com defasagem dada pela fase de $\hat{h}(w)$) na frequência w quando f passa pelo filtro L_h . Por esse motivo, quando o ganho é alto perto de $w = 0$ mas baixo para $|w|$ grande, dizemos que L_h é um filtro de passa-baixa (apenas as frequências baixas sobrevivem a esse filtro). Por outro lado, se $|\hat{h}(w)|$ é alto para $|w|$ grande e baixo para w perto de 0, L_h é um filtro de passa-alta.

Algumas das propriedades básicas da Transformada de Fourier seguem abaixo:

Afirmção 1.13 *As seguintes propriedades são válidas (f e h são sinais quaisquer; $\mathbb{I}(x) \equiv 1$)*

$$\hat{\delta} = \mathbb{I}(w) \quad (\text{e portanto } \widehat{\mathbb{I}} = \delta(w))$$

$$\widehat{f * h} = \hat{f} \cdot \hat{h} \quad (\text{e portanto } \widehat{f h} = \hat{f} * \hat{h})$$

$$g(x) = \delta_a * f = f(x - a) \Rightarrow \hat{g}(w) = \hat{f}(w) e^{-2\pi i w a} \quad (\text{e assim, } |\hat{g}(w)| = |\hat{f}(w)|)$$

$$g(x) = f(ax) \Rightarrow \hat{g}(w) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$$

$$g(x) = f'(x) = \delta' * f \Rightarrow \hat{g}(w) = \widehat{(\delta')} \cdot \hat{f} = 2\pi i w \hat{f}(w)$$

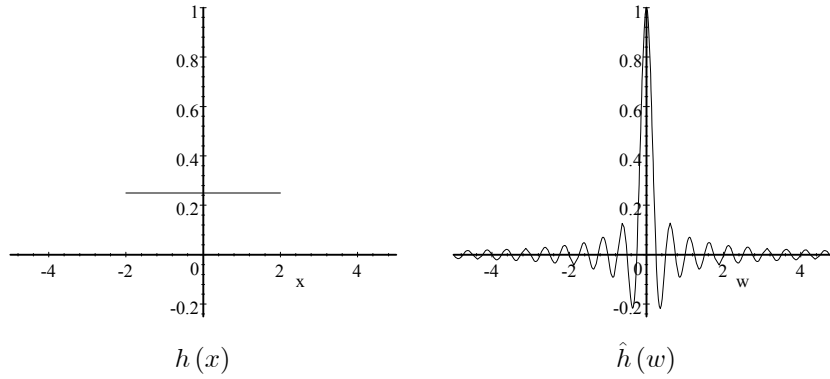
A seguir, apresentamos alguns exemplos de Transformadas de Fourier.

Exemplo 1.14

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & -a \leq x \leq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{h}(w) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-2\pi i w u} du = \frac{1}{2a} \frac{e^{-2\pi i w u}}{-2\pi i w} \Big|_{u=-a}^a = \frac{\sin(2\pi w a)}{2\pi w a}$$

cujos gráficos seguem abaixo (para $a = 2$):



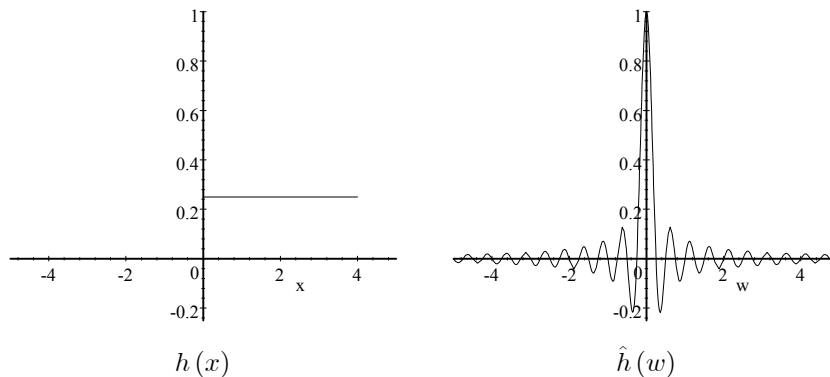
Note como a Transformada de Fourier é maior em baixas frequências (como $w = 0$, onde $\hat{f}(0) = 1$), indicando que h é um filtro de passa-baixa (não muito ideal). Quanto maior o valor de a , mais saliente é este pico. Também vale a pena notar que quando $a \rightarrow 0$, $h \rightarrow \delta$ e $\hat{h} \rightarrow \mathbb{I}$, como esperado. Aliás, a função δ é em geral definida através de um limite deste tipo.

Exemplo 1.15

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & 0 \leq x \leq 2a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{h}(w) = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} e^{-2\pi i w u} du = \frac{1}{2a} \frac{e^{-2\pi i w u}}{-2\pi i w} \Big|_{u=0}^{2a} = \frac{\sin 2\pi w a}{2\pi w a} e^{-2\pi i w a}$$

Como $\hat{h}(w)$ é complexa, mostramos abaixo os gráficos de $h(x)$ e $|\hat{h}(w)| = \frac{\sin 2\pi w a}{2\pi w a}$ para $a = 2$:



Este exemplo ressalta uma propriedade já indicada: transladar h no tempo

(a unidades para a direita) simplesmente muda a fase de \hat{h} (multiplica \hat{h} por $e^{-2\pi i w a}$) mas não muda o seu ganho².

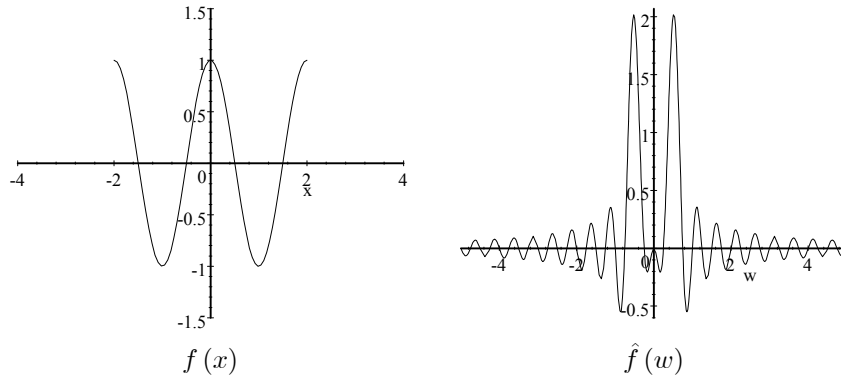
Exemplo 1.16

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi w_0 x), & -a \leq x \leq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{f}(w) = \int_{-a}^a \cos(2\pi w_0 u) e^{-2\pi i w u} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(2a\pi(w + w_0))}{w + w_0} + \frac{\sin(2a\pi(w - w_0))}{w - w_0} \right)$$

cujos gráficos seguem abaixo (para $a = 2$ e $w_0 = 0.5$):



Note como a Transformada de Fourier acusa as fortes presenças das frequências $w = \pm 0.5$. Estes picos têm altura aproximadamente igual a a e ficam mais salientes à medida que a cresce. Note que como f não foi “normalizada”, o valor de $\hat{f}(w)$ perto de $w = \pm w_0$ irá explodir quando a vai para infinito. Esta observação está associada à propriedade de manutenção de energia a seguir.

Afirmção 1.17

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw$$

Em outras palavras, a energia do sinal $f(u)$ no domínio do tempo é a energia de $\hat{f}(w)$ no domínio da frequência. Isto não é surpreendente já que os coeficientes $\hat{f}(w)$ e os coeficientes $f(u)$ nada mais são que decomposições de f em bases ortogonais distintas.

²Literalmente, $|\hat{h}(w)| = \left| \frac{\sin 2\pi w a}{2\pi w a} \right|$, mas usamos esta função sem o módulo a título de comparação com o exemplo anterior. As partes negativas simplesmente indicam uma fase de π .

1.3 Transformadas Bidimensionais

A teoria discutida até aqui é facilmente generalizada para o caso multidimensional. Nesta seção, indicamos os principais resultados associados a convoluções e Transformadas de Fourier bidimensionais; a extensão para maiores dimensões é imediata.

Definição 1.18 A função delta de Dirac bidimensional é a função com a propriedade de amostragem

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(x, y) dA = f(0, 0) \text{ para qualquer } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

que também satisfaz

$$\delta(x, y) = 0 \text{ para qualquer } (x, y) \neq (0, 0)$$

Afirmção 1.19 Defina $\delta_{x_0, y_0} = \delta(x - x_0, y - y_0)$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta_{x_0, y_0}(x, y) dA = f(x_0, y_0)$$

Afirmção 1.20 Toda transformação linear L (que leva funções de duas variáveis em funções de duas variáveis) invariante por translações é dada por uma convolução

$$Lf(a, b) = (f * h)(a, b) \doteq \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) h(a - x, b - y) dA$$

onde $h = L\delta$ é a resposta de L ao impulso unitário bidimensional.

A convolução bidimensional satisfaz as mesmas propriedades que a convolução unidimensional. Em particular, a propriedade da derivada da convolução pode ser aplicada a qualquer derivada parcial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f * g)}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial(f * g)}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} * g = f * \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

Comentário 1.21 Pode-se realizar a convolução em apenas uma das várias variáveis de duas funções; por exemplo, a partir de $f(x, y)$ e $g(x, y)$ podemos realizar uma convolução somente na primeira variável, mantendo y fixo

$$h(x, y) = f *_x g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) g(x - u, y) du$$

Quando isto ocorrer, usaremos a notação $*_x$ para indicar a variável que foi convoluída, como indicado acima (se tal variável não for óbvia do contexto). É

importante distinguir esta convolução da convolução verdadeiramente bidimensional! Por exemplo, não é surpresa que

$$\frac{\partial (f *_x g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} *_x g = f *_x \frac{\partial g}{\partial x}$$

mas para a derivação em y precisamos de uma regra tipo produto

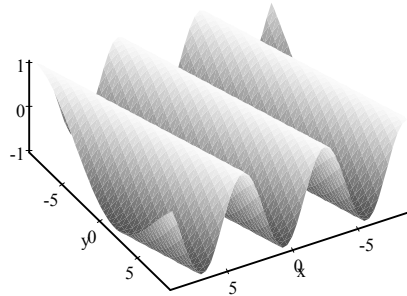
$$\frac{\partial (f *_x g)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} *_x g + f *_x \frac{\partial g}{\partial y}$$

Esta última forma deve ser aplicada sempre que calcularmos derivadas parciais com respeito a variáveis que não estão na convolução!

Os autovetores da convolução são agora dados por autovetores da forma

$$e_{w_1, w_2}(x, y) = e^{2\pi i(w_1 x + w_2 y)}$$

que representam de certa forma frequências puras na direção (w_1, w_2) . A título de ilustração, segue abaixo o gráfico da parte real de e_{w_1, w_2} , a saber, $\cos(w_1 x + w_2 y)$



$$w_1 = 1; w_2 = 0.3$$

Definição 1.22 Dada uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a sua **Transformada de Fourier** como

$$\hat{f}(w_1, w_2) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-2\pi i w_1 x} e^{-2\pi i w_2 y} dA$$

Note que a sua inversa é

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(w_1, w_2) e^{2\pi i w_1 x} e^{2\pi i w_2 y} dw_1 dw_2$$

Exemplo 1.23 Se h somente depende de uma variável, digamos, $h(x, y) = g(x)$, então

$$\begin{aligned}\hat{h}(w_1, w_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i w_1 x} e^{-2\pi i w_2 y} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i w_1 x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i w_2 y} dy \right) dx = \\ &= \hat{g}(w_1) \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin 2\pi w_2 a}{\pi w_2}\end{aligned}$$

não é exatamente a Transformada de Fourier de g (e provavelmente não convergirá). O problema é que o sinal $h(x, y) = g(x)$ tem energia demais. Mesmo que tentemos consertar este problema tomando

$$h(x, y) = \begin{cases} g(x), & -a \leq y \leq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ainda temos

$$\hat{h}(w_1, w_2) = \hat{g}(w_1) \frac{\sin 2\pi w_2 a}{\pi w_2}$$

e a transformada de h ainda não é exatamente a transformada de g . Estas observações são casos especiais da seguinte propriedade.

Proposição 1.24 Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, construa o produto tensorial

$$h(x, y) = f(x)g(y)$$

Então a Transformada de Fourier de h é

$$\hat{h}(w_1, w_2) = \hat{f}(w_1)\hat{g}(w_2)$$

Demonstração. De fato

$$\begin{aligned}\hat{h}(w_1, w_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-2\pi i w_1 x} e^{-2\pi i w_2 y} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y) e^{-2\pi i w_1 x} e^{-2\pi i w_2 y} dx dy = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i w_1 x} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-2\pi i w_2 y} dy \right) = \\ &= \hat{f}(w_1)\hat{g}(w_2)\end{aligned}$$

onde assumimos que todas as integrais acima convergem. ■

Corolário 1.25 A função $h(x, y) = \delta(x)g(y)$ tem Transformada de Fourier $\hat{h}(w_1, w_2) = \hat{g}(w_2)$.

Afirmção 1.26 *As seguintes propriedades são válidas (f e h são sinais bidimensionais quaisquer; $\mathbb{I}(x, y) \equiv 1$)*

$$\begin{aligned} \hat{\delta} &= \mathbb{I}(w_1, w_2) \text{ (e portanto } \widehat{\mathbb{I}} = \delta(w_1, w_2) \text{)} \\ \widehat{f * h} &= \hat{f} \cdot \hat{h} \text{ (e portanto } \widehat{f h} = \hat{f} * \hat{h} \text{)} \\ g(x, y) &= f(x - a, y - b) \Rightarrow \hat{g}(w_1, w_2) = \hat{f}(w_1, w_2) e^{-2\pi i(w_1 a + w_2 b)} \quad (|\hat{g}| = |\hat{f}|) \\ g(x, y) &= f(\alpha x, \alpha y) \Rightarrow \hat{g}(w_1, w_2) = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{w_1}{\alpha}, \frac{w_2}{\alpha}\right) \\ g(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \delta}{\partial x} * f \Rightarrow \hat{g}(w_1, w_2) = \left(\frac{\partial \delta}{\partial x}\right) \cdot \hat{f} = 2\pi i w_1 \hat{f}(w_1, w_2) \end{aligned}$$

1.4 Exercícios

(1) Demonstre as propriedades básicas da convolução (Proposição 1.5) e suas versões bidimensionais.

(2) Demonstre as propriedades da Transformada de Fourier (Afirmções 1.13 e 1.26).

(3) Mostre que se $f(x)$ é real então $\hat{f}(w) = \overline{\hat{f}(-w)}$. Conclua que $\hat{f}(0)$ é real. Generalize para a Transformada de Fourier bidimensional.

(4) Considere $f(x, y) = \cos(2\pi w_1 x + 2\pi w_2 y) = \operatorname{Re} e^{-2\pi i(w_1 x + w_2 y)}$. Vamos encontrar o comprimento de onda e a direção de f em função de w_1 e w_2 .

(a) O que são as curvas de nível de f ?

(b) Dê um vetor perpendicular às curvas de nível de f . Que ângulo este vetor faz com o eixo x ?

(c) Qual a distância entre as curvas sucessivas que correspondem a $f = 1$ (comprimento da onda)?

(5) Mostre que se $f(x) > 0$ para todo x , então $|\hat{f}(w)| \leq \hat{f}(0)$ para qualquer w ; em outras palavras, no domínio da frequência, a componente mais forte de um sinal **positivo** é a componente contínua. Generalize para o caso bidimensional. Quando ocorre a igualdade?

(6) Uma longa barra numa imagem parece produzir “linhas de frequências” na sua Transformada de Fourier. Vamos descobrir porque isto acontece:

(a) Calcule a Transformada de Fourier da função $f(x, y) = \delta(x)$ (versão idealizada de uma barra fina e longa). Há tais linhas?

(b) Calcule a Transformada de Fourier da função indicatriz de um retângulo $2m \times 2n$ centrado na origem com lados paralelos aos eixos (isto é, uma função que vale 1 dentro do retângulo e 0 fora dele).

(c) Suponha que $m \gg n$, por exemplo. Há tais linhas (ou segmentos)? Onde?

(7) a) Utilize uma Transformada de Sinus (Fourier) para mostrar que a solução geral $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da Equação Diferencial Ordinária

$$f''(x) = -K f(x)$$

onde K é uma constante positiva, é dada por

$$f(x) = K_1 e^{\sqrt{K}ix} + K_2 e^{-\sqrt{K}ix}$$

b) Utilize uma Transformada de Sinus (Fourier) para encontrar todas as funções $F(x, t)$ que satisfaçam a Equação Diferencial Parcial abaixo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ F(x, 0) &= f_0(x) \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

(8) Se uma rotação de coordenadas de ângulo θ é aplicada a uma função $f(x, y)$, como muda a sua Transformada de Fourier?

Bibliografia

- [1] Rafael Íorio Júnior and Valéria de Magalhães Íorio, *Equações diferenciais parciais: Uma introdução*, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.