Capítulo 2

Transformadas de Sinais Discretos

2.1 Convoluções

Como no capítulo anterior, considere um operador L cuja entrada é agora um sinal **discreto** unidimensional $f[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ e cuja saída será um outro sinal discreto $Lf[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Note o uso de colchetes ao invés de parênteses para indicar que o sinal é discreto, notação que adotaremos daqui por diante.

Nesta seção examinaremos brevemente a classe dos operadores L que sejam lineares e invariantes por translações (cuja definição é similar à do capítulo anterior). Desta vez, faremos uso da versão discreta da função delta de Dirac:

Definição 2.1 *A função delta de Dirac discreta (ou impulso unitário discreto) é definida por*

$$\delta[0] = 1$$
$$\delta[n] = 0 \text{ se } n \neq 0$$

Corolário 2.2 *A função delta de Dirac discreta é a única com a propriedade de amostragem*

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} f[\alpha]\,\delta[\alpha] = f[0] \quad \text{para qualquer } f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

Note que

$$f[n] = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} f[\alpha]\,\delta[n-\alpha]$$

e as seqüências $\delta_\alpha[n] = \delta[n-\alpha]$ são uma base natural do espaço de seqüências.

Proposição 2.3 *Toda transformação linear invariante por translações é dada por uma convolução discreta*

$$Lf[n] = (f * h)[n] \triangleq \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} f[\alpha]\, h[n-\alpha]$$

onde $h = L\delta$ é a resposta de L ao impulso unitário.

Demonstração. Seja $h = L\delta$. Então como L é linear e invariante por translações

$$Lf[n] = L\left\{\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} f[\alpha]\,\delta[n-\alpha]\right\} = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} L\{f[\alpha]\,\delta[n-\alpha]\} =$$
$$= \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} f[\alpha]\, L\{\delta[n-\alpha]\} = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} f[\alpha]\, h[n-\alpha] = f * h$$

sempre que os somatórios acima convirjam fortemente. ∎

A função $h = L\delta$ é chamada de *função de espalhamento pontual discreta* de L; como antes, usaremos $L_h f = f * h$.

Note que nem sempre a convolução de duas seqüências está bem definida (de fato, até mesmo a demonstração da proposição acima falha se os somatórios nela envolvidos não convergirem). No entanto, se nos limitarmos a seqüências de quadrado somável

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |f[n]|^2 < +\infty$$

então a convolução está bem definida e as seguintes propriedades são válidas.

Proposição 2.4 *Dadas seqüências f, g e h de quadrado somável*

$$\begin{aligned} f * g &= g * f \\ (f * g) * h &= f * (g * h) \\ f * \delta &= f \\ \Delta(f * g) &= \Delta f * g = f * \Delta g \end{aligned}$$

onde Δf é a seqüência definida por $\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]$.

Em particular, sinais finitos (isto é, com suporte finito: $n > M \Rightarrow f[n] = 0$ para algum M) satisfazem todas essas propriedades. Note também que a última propriedade vem das duas primeiras, já que $\Delta f = K * f$ onde $K = [1\ \ -1]$ é centrado em -1 (isto é, $K[0] = -1$).

2.2 Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)

Se L_h é um operador convolução qualquer definido por $L_h \{f\} = f * h$, será que podemos diagonalizá-lo? Se sim, que base o faz? Quais os autovetores do operador convolução?

Proposição 2.5 *A seqüência $e_w [n] = e^{2\pi iwn}$ é um autovetor do operador L_h (qualquer que seja h).*

Demonstração. De fato,

$$L_h e_w [n] = h * e_w = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h [\alpha] e^{2\pi iw(n-\alpha)} =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h [\alpha] e^{-2\pi iw\alpha} \right) e^{2\pi iwn} = \hat{h} (w) e_w [n]$$

mostra que e_w é um autovetor com autovalor dado pela expressão

$$\hat{h} (w) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h [\alpha] e^{-2\pi iw\alpha}$$

■

Novamente, toda convolução tem como autovetores os mesmos vetores e_w; apenas os autovalores $\hat{h} (w)$ é que mudam de convolução para convolução. Note uma peculiariedade deste conjunto de vetores: como n é sempre um inteiro, $e_w [n] = e_{w+1} [n]$ para qualquer w. Em outras palavras, basta considerarmos os vetores e_w para $0 \leq w < 1$ – qualquer outro valor de w apenas repete vetores já considerados.

Como decompor uma seqüência $f [n]$ como combinação linear desses e_w (com $0 \leq w < 1$) para que possamos realizar a convolução via produtos? O caminho certo é tentar algo na linha do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} f [\alpha] \overline{g [\alpha]}$$

que está definido no sentido clássico para todas as seqüências de quadrado somável. De certa forma, os vetores e_w formam uma base ortogonal (isto não faz sentido na análise clássica – os vetores e_w não são seqüências de quadrado somável). Este fato nos sugere o uso do produto interno para decompor uma seqüência $f [n]$ em componentes de diversas freqüências.

Definição 2.6 *A Transformada de Fourier de Tempo Discreto*[1] *(Discrete-Time*

[1] O nome que se dá a esta transformada é bastante infeliz: gostaríamos de chamá-la de Transformada de Fourier Discreta, mas este nome é reservado para uma outra situação que será discutida no capítulo seguinte: o caso em que $f [n]$ é uma seqüência finita (isto é, um vetor em $\mathbb{R}^m$)

Fourier Transform, ou DTFT) de uma seqüência $f[n]$ é dada por

$$\hat{f}(w) = \langle f, e_w \rangle = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} f[\alpha]\, e^{-2\pi i w \alpha}$$

sempre que este somatório for válido.

Como $\hat{f}(w)$ é periódica de período 1, é comum imaginá-la como uma função $\hat{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ ou $\hat{f} : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$. Note também que, felizmente, a notação $\hat{h}$ acima é consistente com essa definição.

Estranhamente, a afirmação de que os vetores e_w são ortogonais nos indica o caminho certo mas **não é necessária** para demonstrar a fórmula da Transformada Inversa. Ao invés, o resultado que precisamos é um cálculo simples cuja demonstração deixamos ao leitor:

Lema 2.7

$$\int_0^1 e^{2\pi i n w}\, dw = \delta[n]$$

Proposição 2.8 (Transformada Fourier Inversa de Tempo Discreto) *A seqüência $f[n]$ pode ser decomposta como uma "combinação linear" dos vetores e_w da seguinte forma*

$$f[n] = \int_0^1 \hat{f}(w)\, e^{2\pi i w n}\, dw$$

Demonstração. Usando a definição de $\hat{f}$ e o lema acima

$$\int_0^1 \hat{f}(w)\, e^{2\pi i w n}\, dw = \int_0^1 \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} f[\alpha]\, e^{-2\pi i w \alpha} e^{2\pi i w n}\, dw =$$

$$= \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} f[\alpha] \left(\int_0^1 e^{2\pi i (n-\alpha) w}\, dw \right) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} f[\alpha]\, \delta[n-\alpha] = f[n]$$

■

Definição 2.9 *A DTFT Inversa de um sinal $g(w)$ é denotada por*

$$\check{g}[n] = \int_0^1 g(w)\, e^{2\pi i w n}\, dw$$

Intuitivamente, $\hat{f}(w)$ mede o quanto de uma freqüência w está presente na seqüência $f[n]$; como freqüências que diferem por 1 são indistinguíveis numa seqüência discreta ($e_1[n] = e^{2\pi n} = 1 = e_0[n]$), basta considerar $0 \leq w < 1$. Diz-se que $\hat{f}(w)$ é a representação da seqüência $f[n]$ no *espaço da freqüência.*

As propriedades básicas da DTFT seguem abaixo:

Afirmação 2.10 *As seguintes propriedades são válidas (f e h são seqüências quaisquer; $\mathbb{I}[n] \equiv 1$)*

$$\widehat{\delta[n]} \equiv 1$$

$$\widehat{\mathbb{I}[n]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w-k) \text{ (extensão periódica de } \delta(w) \text{)}$$

$$\widehat{f * h} = \hat{f}.\hat{h}$$

$$\widehat{fh} = \hat{f} * \hat{h}$$

$$g[n] = f[n-\alpha] \Rightarrow \hat{g}(w) = \hat{f}(w)\, e^{2\pi i w \alpha} \text{ (e } |\hat{g}(w)| = \left|\hat{f}(w)\right| \text{)}$$

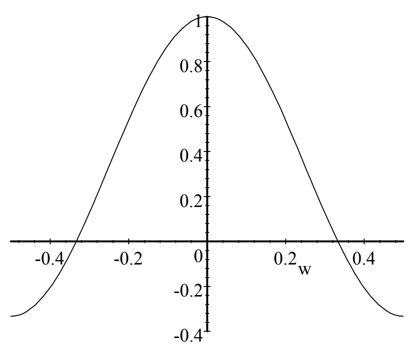
Exemplo 2.11 *Seja $h[n] = \frac{1}{3}$ para $n \in \{-1, 0, 1\}$ ($h[n] = 0$ caso contrário). O filtro L_h é um filtro "box", que suaviza um sinal f. De fato, a convolução substitui $f[n]$ pela média de seus 3 valores vizinhos*

$$L_h f[n] = \frac{f[n-1] + f[n] + f[n+1]}{3}$$

No espaço da freqüência, tem-se

$$\hat{h}(w) = \frac{1}{3}\left(e^{2\pi i w} + 1 + e^{-2\pi i w}\right) = \frac{1}{3}(2\cos 2\pi w + 1)$$

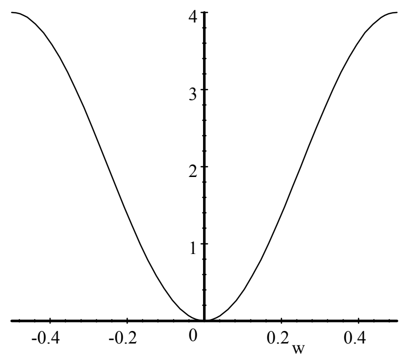
cujo gráfico segue abaixo (usando $-0.5 \leq w \leq 0.5$)



confirmando que h é um filtro razoável de passa-baixa (mas note que, por exemplo, $\left|\hat{h}(0.5)\right| > \left|\hat{h}(0.3)\right|$). Por exemplo, se f é uma discretização do degrau unitário, tem-se

$f =$	...	0	0	0	1	1	1	...
$f * h =$	...	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	...

Exemplo 2.12 *Por outro lado, se $h = [-1\ 2\ -1]$, sua DTFT é dada por*



$$\hat{h}\,(w) = 2 - 2\cos 2\pi w$$

e L_h é um ótimo filtro de passa-alta. Por exemplo

$f =$	...	0	0	0	0	1	1	1	1	...
$f * h =$	...	0	0	0	-1	1	0	0	0	...

Comentário 2.13 *Note que a DTFT corresponde à Transformada de Fourier da amostragem pontual de um sinal, isto é,*

$$g\,(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\,[n]\,\delta\,[x-n] \Rightarrow \hat{g}\,(w) = \hat{f}\,(w)$$

onde $\hat{g}$ corresponde à Transformada de Fourier "tradicional" (que, neste caso, é naturalmente periódica) enquanto $\hat{f}$ é a DTFT de f. Assim, se utilizarmos a prática (comum em Processamento de Sinais) de identificar um sinal discreto com uma soma de impulsos

$$f\,[n] \approx g\,(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\,[k]\,\delta_k\,(x)$$

a Transformada de Fourier passa a ser uma única transformada.

2.3 Transformada Z

Definição 2.14 *Dada uma seqüência $f\,[n]$ definida para n inteiro, definimos a sua Transformada Z (também denominada função geradora) como a série de potências*

$$\varphi_f\,(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\,[n]\,z^n$$

A Transformada Z é basicamente a DTFT onde usamos z ao invés de $e^{-2\pi i w}$. Muitas vezes esta substituição nos permite trabalhar de maneira bem mais simples. Em geral, uma série de potências desse tipo converge apenas para $r_1 < |z| < r_2$ (para algum r_1, r_2); em particular, se tivermos uma expressão para a Transformada Z de uma seqüência válida para $|z| = 1$, podemos calcular a sua Transformada de Fourier via

$$\hat{f}(w) = \varphi_f\left(e^{-2\pi i w}\right)$$

Caso a Transformada Z seja bem definida (e diferenciável em volta de $z = 1$), temos as seguintes propriedades:

- Normalização

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] = \varphi_f(1)$$

e diz-se que f é normalizada quando

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] = \varphi_f(1) = 1$$

- Média

$$\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n f[n] = \varphi_f'(1)$$

- Variância

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-\mu)^2 f[n] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n-1) f[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(1-2\mu) f[n] + \mu^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] = \\ &= \varphi_f''(1) + \mu - \mu^2\end{aligned}$$

se f é normalizada.

- Convolução

$$\varphi_{f_1 * f_2} = \varphi_{f_1}\varphi_{f_2}$$

Em particular, se f_1 e f_2 são normalizadas, com Transformadas Z dadas por φ_1 e φ_2, médias μ_1 e μ_2 e variâncias σ_1^2 e σ_2^2, a convolução $f_1 * f_2$ terá média $\mu = \mu_1 + \mu_2$ e variância $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. De fato

$$\begin{aligned}&\varphi = \varphi_{f_1 * f_2} = \varphi_1\varphi_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = \varphi'(1) = \varphi_1'(1)\varphi_2(1) + \varphi_1(1)\varphi_2'(1) = \mu_1 + \mu_2 \\ \sigma^2 = \varphi''(1) + \mu - \mu^2 = \\ = \varphi_1''(1)\varphi_2(1) + 2\varphi_1'(1)\varphi_2'(1) + \varphi_1(1)\varphi_2''(1) + \mu - \mu^2 = \\ = \left(\sigma_1^2 - \mu_1 + \mu_1^2\right) + 2\mu_1\mu_2 + \left(\sigma_2^2 - \mu_2 + \mu_2^2\right) + \mu - \mu^2 = \\ = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{array}\right.\end{aligned}$$

- Reflexão

$$f_2[n] = f_1[-n] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi_2(z) = \varphi_1\left(z^{-1}\right);\ \mu_2 = -\mu_1;\ \sigma_2^2 = \sigma_1^2$$

Exemplo 2.15 *Do mesmo modo que as Transformada de Fourier e Laplace são ferramentas utilizadas na resolução de equações diferenciais, a Transformada Z (ou a DTFT) pode ser usada para resolução de equações diferenciais discretas. Por exemplo, se quisermos* $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\frac{\partial F_t[n]}{\partial t} = F_t[n] - F_t[n-1]$$
$$F_0[n] \equiv f_0[n]$$

podemos notar que $F_t[n] - F_t[n-1] = (K * F_t)[n]$ *(onde* $K = [-1\ 1]$ *é centrado em* -1*) e aplicar a Transformada Z*

$$\frac{\partial \varphi_{F_t}}{\partial t} = (z-1)\varphi_{F_t}$$
$$\varphi_{F_0} = \varphi_{f_0}$$

então

$$\varphi_{F_t} = e^{(z-1)t}\varphi_{f_0}$$

Mas note que

$$e^{(z-1)t} = e^{-t}\left(e^{zt}\right) = e^{-t}\left(1 + tz + \frac{t^2}{2}z^2 + \frac{t^3}{3!}z^3 + ...\right)$$

vale para $|z| = 1$*. Portanto*

$$F_t = e^{-t}\left[1\ t\ \frac{t^2}{2}\ \frac{t^3}{3!}\ \frac{t^4}{4!}...\right] * f_0$$

Note que a DTFT poderia ser utilizada com o mesmo propósito, mas as integrais envolvidas são difíceis de resolver (tente!); a Transformada Z providencia automaticamente uma substituição agradável ($e^{-2\pi i w}$ *ao invés de* z*).*

Proposição 2.16 *A solução da equação diferencial*

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = A * F_t$$

é dada por

$$F_t = T_t * F_0$$

onde T_t *é dada por*

$$T_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(A)^{*n} = \delta + tA + \frac{t^2}{2}A * A + \frac{t^3}{3!}A * A * A + ...$$

Demonstração. A demonstração é análoga à resolução do exemplo acima; basta tomar a Transformada Z da equação diferencial e resolvê-la

$$\varphi_{F_t} = e^{t\varphi_A}\varphi_{F_0}$$

portanto, a solução é da forma $F_t = T_t * F_0$ onde

$$\varphi_{T_t} = e^{t\varphi_A} = 1 + t\varphi_A + \frac{t^2}{2}\varphi_A^2 + \frac{t^3}{3!}\varphi_A^3 + ...$$

e aplicando a Transformada Z inversa[2] terminamos a demonstração. ∎

Definição 2.17 *Com a notação acima, o núcleo A é chamado* gerador infinitesimal *do semi-grupo T_t. Uma maneira mais sucinta de exprimir a relação entre A e T_t é*

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} = \lim_{h\to 0}\frac{T_{t+h} - T_t}{h} = A * T_t$$

Note que a condição de que T_t seja um semi-grupo (isto é, $T_{t_1} * T_{t_2} = T_{t_1+t_2}$) é necessária para que o gerador inifintesimal exista independente de t; então podemos ser ainda mais sucintos:

$$A = \lim_{h\to 0}\frac{T_h - \delta}{h}$$

Comentário 2.18 *A série*

$$\varphi_f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\ z^n$$

é conhecida em Variáveis Complexas como série de Laurent *da função $\varphi_f(z)$. No exemplo acima, a expansão de e^{tz} como série de potências de z era simples. No caso geral, a resposta pode ser obtida usando a IDTFT*

$$f[n] = \int_0^1 \hat{f}(w)\, e^{2\pi iwn} dw$$

Para escrevê-la a partir da Transformada Z, use a mudança de variáveis $z = e^{-2\pi iw}$

$$\hat{f}(w) = \varphi_f(z)\,;\ dz = -2\pi i e^{-2\pi iw} dw = -2\pi iz\ dw$$

Assim, se $\mathcal{C}$ é a circunferência de centro 0 e raio 1 no plano complexo

$$f[n] = \int_{-\mathcal{C}} \varphi_f(z)\, z^{-n}\frac{dz}{-2\pi iz} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{\varphi_f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

[2] E reconhecidamente varrendo possíveis problemas de convergência para debaixo do tapete...

e esta seria a fórmula da "Inversa da Transformada Z". Usando a teoria de Variáveis Complexas, pode-se mostrar que:
i) Se $\varphi_f(z)$ é analítica no anel $r_1 < |z| < r_2$, então a série de Laurent cujos coeficientes $f[n]$ são obtidos pela fórmula acima converge de fato para $\varphi_f(z)$ para $r_1 < |z| < r_2$;
ii) Se uma série de Laurent converge para uma função analítica $\varphi_f(z)$ num anel $r_1 < |z| < r_2$, então seus coeficientes têm de ser obtidos pela fórmula acima.

2.4 Transformadas Bidimensionais

Mais uma vez, não é difícil generalizar a teoria acima para o caso multidimensional. A título de referência, apresentamos os principais resultados associados a convoluções e Transformadas de Fourier bidimensionais, deixando a extensão multi-dimensional ao leitor.

Definição 2.19 *A função delta de Dirac discreta é definida por*

$$\delta[m,n] = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Afirmação 2.20 *Defina $\delta_{j,k}[m,n] = \delta[m-j, n-k]$. Então*

$$f[m,n] = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} f[j,k]\,\delta_{j,k}[m,n]$$

para qualquer sinal bidimensional discreto $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$.

Proposição 2.21 *Toda transformação linear invariante por translações (que leva $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ em $Lf : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$) é dada por uma convolução discreta*

$$Lf[m,n] = (f * h)[m,n] \doteq \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} f[j,k]\,h[m-j, n-k]$$

onde $h = L\delta$ é a resposta de L ao impulso unitário.

A convolução bidimensional discreta satisfaz as mesmas propriedades que a unidimensional discreta. Seus autovetores têm a forma

$$e_{w_1,w_2}[m,n] = e^{2\pi i(w_1 m + w_2 n)} \text{ para } 0 \leq w_1, w_2 < 1$$

Definição 2.22 *Dada uma seqüência $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$, definimos a sua **DTFT** como*

$$\hat{f}(w_1, w_2) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} f[j,k]\,e^{-2\pi i w_1 j} e^{-2\pi i w_2 k} \quad 0 \leq w_1, w_2 \leq 1$$

Sua inversa é

$$f[m,n] = \int_0^1 \int_0^1 \hat{f}(w_1, w_2)\,e^{2\pi i w_1 m} e^{2\pi i w_2 n}\,dw_1\,dw_2$$

Afirmação 2.23 *As seguintes propriedades são válidas (f e h são seqüências bidimensionais quaisquer; $\mathbb{I}[m,n] \equiv 1$)*

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta[m,n]} &\equiv 1 \\
\widehat{\mathbb{I}[m,n]} &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \delta(w_1 - j, w_2 - k) \text{ (trem bidimensional de pulsos)} \\
\widehat{f * h} &= \hat{f}.\hat{h} \\
\widehat{fh} &= \hat{f} * \hat{h} \\
g[m,n] &= f[m-a, n-b] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \hat{g}(w_1,w_2) = \hat{f}(w_1,w_2)\, e^{-2\pi i(w_1 a + w_2 b)}; \ |\hat{g}(w)| = \left|\hat{f}(w)\right|
\end{aligned}$$

Vale a pena também ressaltar a versão bidimensional da Transformada Z.

Definição 2.24 *Dada uma seqüência $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ definimos a sua Transformada Z como*

$$\varphi_f(z_1,z_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f[m,n]\, z_1^m z_2^n$$

Afirmação 2.25 *Em geral*

$$\hat{f}(w_1,w_2) = \varphi_f\left(e^{-2\pi i w_1}, e^{-2\pi i w_2}\right)$$

Afirmação 2.26 *Se f é separável em f_1 e f_2, isto é, $f[m,n] = f_1[m]\, f_2[n]$, então*

$$\begin{aligned}
\varphi_f(z_1,z_2) &= \varphi_{f_1}(z_1)\, \varphi_{f_2}(z_2) \\
\hat{f}(w_1,w_2) &= \hat{f}_1(w_1)\, \hat{f}_2(w_2)
\end{aligned}$$

Em particular, usando esta propriedade podemos construir filtros bidimensionais passa-baixa a partir de dois filtros unidimensionais passa-baixa.

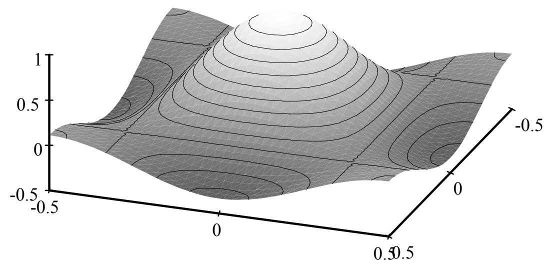
Exemplo 2.27 *A Transformada Z do filtro "box" bidimensional centrado em $(0,0)$*

$$B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é

$$\begin{aligned}
\varphi_B(x,y) &= \frac{1}{9}\left(xy + xy^{-1} + x^{-1}y + x^{-1}y^{-1} + x + y + x^{-1} + y^{-1} + 1\right) = \\
&= \left(\frac{1 + x + x^{-1}}{3}\right)\left(\frac{1 + y + y^{-1}}{3}\right)
\end{aligned}$$

já que B é separável em dois filtros box unidimensionais. O gráfico de $\hat{B}(w_1,w_2)$ é



$\hat{B} = \frac{1}{9}\left(2\cos 2\pi w_1 + 1\right)\left(2\cos 2\pi w_2 + 1\right)$

2.5 Exercícios

(1) Demonstre as propriedades básicas da convolução discreta (Proposição 1.4) e suas versões bidimensionais.

(2) Demonstre as propriedades da DTFT (Afirmações 1.10 e 1.23).

(3) Mostre que se f é periódica então $f * g$ (se existir) será também periódica.

(4) Mostre que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (f * g)[j] = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f[j]\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} g[j]\right)$$

(assumindo que os somatórios duplos que aparecem convergem em qualquer ordem; isto é verdade, por exemplo, se f e g forem sinais finitos).

(5) Considere o filtro $b_1 = \frac{1}{2}\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$, isto é,

$$b_1[n] = \begin{cases} \frac{1}{2},\ n = 0, 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

e defina

$$b_n \doteq b_1 * b_1 * \ldots * b_1 = b_{n-1} * b_1$$

(a) Mostre que $b_n = \frac{1}{2^n}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & n & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \ldots & n & 1 \\ \hline\end{array}$, isto é,

$$b_n[k] = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

(b) Calcule $\hat{b}_1(w)$ e use-o para determinar $\hat{b}_n(w)$. Faça o gráfico de $\hat{b}_n$. Conclua que b_n é um filtro de passa-baixa.

(6) Considere $f = C\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline ... & 0 & 0 & 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 & ... \\ \hline\end{array}$ (centrado em 1, isto é, $f[0] = C$), onde $\beta < 1$. Encontre uma expressão compacta para $\varphi_f(z)$ (ela deve ser válida para $|z| < \frac{1}{\beta}$) e para a DTFT de f. Use-as para normalizar f, e então calcule a sua média e variância.

(7) Encontre todas as famílias de seqüências $f_t[n]$ que satisfazem

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}[n] = f_t[n] + f_t[n-1]$$

Escreva f_t em função de f_0 usando convoluções.

(8) Uma longa barra numa imagem parece produzir "segmentos de freqüências" na sua DTFT. Vamos descobrir porque isto acontece:
(a) Calcule a DTFT da função $f[x,y] = \delta[x]$ (uma barra fina e longa discreta). Há tais linhas?
(b) Calcule a DTFT da função indicatriz de um retângulo $(2m+1) \times (2n+1)$ com lados paralelos aos eixos, centrado na origem.
(c) Suponha que $m >> n$, por exemplo. Há tais linhas (ou segmentos)? Onde?

(9) Dado um sinal discreto $f[n]$, considere a suavização $L_1 f = f * h_1$, onde

$$h_1[m] = 1, \ m = 0, 1$$

Nesta questão procuramos restaurar um sinal que foi suavizado pela aplicação de L_1.
(a) Calcule $\varphi_1(z)$, a Transformada Z de h_1. Usando a série formal

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + ...$$

escreva a Transformada Z Inversa de $\frac{1}{\varphi_1(z)}$ como

$$h_2[m] = (-1)^m, \ m \geq 0$$

(b) Mostre **diretamente** que h_2 é um inverso de convolução de h_1, isto é, que $h_1 * h_2 = \delta$.
(c) Considere o sinal $f_0[n] = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Calcule **diretamente** $f_0 * h_1$ e $(f_0 * h_1) * h_2$.
(d) Por uma simples inspeção do sinal f_0, vemos que $w_0 = \frac{1}{2}$ é uma de suas freqüências predominantes. Qual o valor de $\hat{h}_1(w_0) = \varphi_1\left(e^{-2\pi i w_0}\right)$? Qual o ganho que a convolução com h_2 produz na freqüência w_0?
(e) O que você conclui a respeito do uso de h_2 como filtro inverso de h_1?
[Nota: algumas das propriedades básicas da convolução não estão funcionando aqui; o problema ocorre porque f_0 e h_2 não decaem suficientemente rápido em $\pm\infty$, e a Transformada Z utilizada não converge para $|z| = 1$; dados estes h_1 e

h_2, para que $(f * h_1) * h_2 = f$ é **necessário** que $f[n] \to 0$ quando $n \to -\infty$; surpreendentemente, isto não é suficiente!]

(10) Poderíamos driblar os problemas de convergência no problema anterior ao calcularmos a Transformada Z Inversa de

$$\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_1^2(z) + B^2}$$

para alguma constante B.
(a) Considere o filtro

$$h_3[n] = (-1)^n (\cos\alpha)^{n+1} \cos((n+1)\alpha), \quad n \geq 0, \ \cos\alpha \neq \pm 1$$

Mostre que $h_3[n] \to 0$ quando $n \to \pm\infty$. Mostre que

$$\lim_{\alpha \to 0} h_3[n] = h_2[n]$$

pontualmente. Isto é, h_3 é um filtro que aproxima h_2, mas h_3 é mais "bem-comportado".
(b) Usando que $2\cos(n\alpha) = e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}$, mostre que a Transformada Z de h_3 é

$$\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_1^2(z) + \tan^2\alpha}$$

(que vale para $|z| = 1$). Portanto, a convolução com h_3 é uma restauração parcial razoável de $f * h_1$.