

Capítulo 3

Transformadas de Sinais Finitos

3.1 Convoluções Circulares

Desta vez, considere uma transformação linear $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ (ou $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$). Estamos interessados nos operadores L que satisfazem a seguinte propriedade

$$\begin{aligned} L(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) &= (b_0, b_1, \dots, b_{N-1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow L(a_{N-1}, a_0, a_1, \dots, a_{N-2}) = (b_{N-1}, b_0, b_1, \dots, b_{N-2}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

que é semelhante à invariância por translação dos capítulos anteriores.

Há uma maneira mais compacta de enunciar tal propriedade: seja \mathfrak{S} a transformação linear dada por $\mathfrak{S}(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) = (a_{N-1}, a_0, a_1, \dots, a_{N-2})$, isto é

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então a propriedade 3.1 diz que $L\mathfrak{S} = \mathfrak{S}L$.

Denotemos a base canônica de \mathbb{R}^N por

$$\begin{aligned} \delta_0 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \delta_1 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ \delta_{N-1} &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Note que $L\delta_0$ é suficiente para determinar todos os outros $L\delta_k$. De fato, se

$$L\delta_0 = (h_0, h_1, h_2, \dots, h_N)$$

então usando a propriedade 3.1 seguidas vezes obtemos

$$L\delta_1 = (h_{N-1}, h_0, h_1, \dots, h_{N-2})$$

$$L\delta_2 = (h_{N-2}, h_{N-1}, h_0, \dots, h_{N-3})$$

...

$$L\delta_{N-1} = (h_1, h_2, \dots, h_{N-1}, h_0)$$

e nesta base L pode ser representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_{N-1} & \dots & h_1 \\ h_1 & h_0 & \dots & h_2 \\ h_2 & h_1 & \dots & h_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \dots & h_0 \end{bmatrix}$$

Corolário 3.1 *Toda transformação linear L satisfazendo 3.1 é dada por uma convolução circular*

$$(Lf)_j = (f *_c h)_j \doteq \sum_{k=0}^j f_k h_{j-k} + \sum_{k=j+1}^{N-1} f_k h_{N+j-k} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k h_{(j-k) \bmod N}$$

para qualquer vetor $f \in \mathbb{R}^N$ (ou \mathbb{C}^N), onde $h = L\delta_0$.

O vetor δ_0 faz o papel da função delta de Dirac dos capítulos anteriores. A propriedade de amostragem torna-se

$$\langle f, \delta_0 \rangle = f_0$$

para qualquer vetor $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$. Novamente, como $h = L\delta_0$ determina completamente a transformação L , usaremos a notação $L_h f = f *_c h$.

Proposição 3.2 *Dados vetores f, g e h em \mathbb{C}^N*

$$\begin{aligned} f *_c g &= g *_c f \\ (f *_c g) *_c h &= f *_c (g *_c h) \\ f *_c \delta_0 &= f \end{aligned}$$

3.2 Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Não é difícil diagonalizar um operador do tipo $L_h : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$.

Proposição 3.3 *Se α é uma raiz N -ésima da unidade ($\alpha = e^{\frac{2\pi i}{N}w}$), o vetor $e = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{N-1})$ é um autovetor de L_h .*

Demonstração. A j -ésima componente de $L_h e = h * e$ é dada por

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_k e_{(j-k) \bmod N} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \alpha^{j-k}$$

já que $\alpha^N = 1 \Rightarrow \alpha^{N+j-k} = \alpha^{j-k}$. Então

$$(L_h e)_j = \left(\sum_{k=0}^{N-1} h_k \alpha^{-k} \right) \alpha^j$$

Como o somatório não depende de j , concluímos que e é um autovetor

$$L_h e = \lambda e$$

com autovalor dado pela expressão

$$\lambda = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-\frac{2\pi i k}{N} w}$$

■

Note que se α percorre todos os valores possíveis para as N -ésimas raízas da unidade, os vetores e correspondentes formam uma base ortogonal de \mathbb{C}^N . Não é difícil renormalizá-los para obter uma base ortonormal.

Lema 3.4 *Os vetores $e_w = \frac{1}{\sqrt{N}} (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{N-1})$ onde $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{N} w}$ (para $w = 0, 1, \dots, N-1$) são ortonormais, isto é,*

$$\langle e_{w_1}, e_{w_2} \rangle = \delta_{w_1, w_2} = \begin{cases} 1, & \text{se } w_1 = w_2 \\ 0, & \text{se } w_1 \neq w_2 \end{cases}$$

Agora é simples decompor um vetor qualquer $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ na base $\{e_w\}_{w=0,1,\dots,N-1}$. Primeiro, vamos à expressão de cada um dos coeficientes em e_w .

Definição 3.5 *A Transformada de Fourier Discreta (Discrete Fourier Transform, ou DFT) de um vetor $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ é dada por*

$$\hat{f}_w = \langle f, e_w \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i m}{N} k}$$

Para evitar (ou criar) confusão, devemos mencionar que há 2 outras definições ligeiramente diferentes da DFT na literatura, trocando a constante na frente do somatório por $\frac{1}{N}$ ou por 1. Também, o nome DFT é um pouco infeliz mas consagrado pela literatura (gostaríamos de chamá-la de Transformada de Fourier Finita). Finalmente, note que com esta definição o autovalor λ correspondente ao autovetor e_w de L_h não é exatamente \hat{h}_w ; ao invés, temos

$$L_h e_w = \sqrt{N} \hat{h}_w e_w$$

A recomposição do vetor f é dada pela Inversa da DFT:

Corolário 3.6 (Transformada Inversa de Fourier Discreta) *Um vetor f em \mathbb{C}^N pode ser recomposto como*

$$f = \sum_{w=0}^{N-1} \hat{f}_w e_w$$

ou seja, sua j -ésima componente (na base canônica) é dada por

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{w=0}^{N-1} \hat{f}_w e^{\frac{2\pi i}{N} jw}$$

A nossa escolha mantém uma certa simetria entre as definições da DFT e da IDFT. Se escolhêssemos a constante $\frac{1}{N}$ na DFT, teríamos que utilizar 1 na IDFT, e vice-versa. Preferimos a nossa definição pois, além de simétrica, vem naturalmente de uma base ortonormal.

Definição 3.7 *A DFT Inversa de uma seqüência finita $g = \{g_0, g_1, \dots, g_{N-1}\}$ é denotada por*

$$\check{g}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{w=0}^{N-1} g_w e^{\frac{2\pi i}{N} jw}$$

Intuitivamente \hat{f}_w mede o quanto da freqüência $\frac{w}{N}$ está presente na seqüência finita de valores $\{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$. A título de ilustração, no caso em que N é par, note que a oscilação mais rápida que pode ser bem representada por uma tal seqüência f corresponde a $e^{\frac{N}{2}} = \frac{1}{\sqrt{N}} (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$ (freqüência $\frac{N/2}{N} = \frac{1}{2}$).

Com esta definição da DFT, temos:

Afirmção 3.8 *As seguintes propriedades são válidas (f e h são vetores quaisquer em \mathbb{C}^N ; fh representa a multiplicação componente a componente)*

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_0 &= \frac{1}{\sqrt{N}} (1, 1, \dots, 1) \\ (1, \widehat{1}, \dots, 1) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \delta_0 \\ \widehat{f * _c h} &= \sqrt{N} \hat{f} \cdot \hat{h} \\ \widehat{fh} &= \sqrt{N} \hat{f} * _c \hat{h} \\ g = \mathfrak{F}^\alpha f &\Rightarrow \hat{g}_w = e^{-\frac{2\pi i \alpha}{N} w} \hat{f}_w \text{ (em particular, } |\hat{g}_w| = |\hat{f}_w| \text{)} \end{aligned}$$

Comentário 3.9 *FFT (Fast Fourier Transform) e VFFT (Very Fast Fourier Transform) não são outras transformadas de sinais – tais siglas se referem a algoritmos rápidos que calculam a DFT aqui apresentada, usualmente quando*

N é potência de 2. Tais algoritmos são tão eficientes que frequentemente é preferível calcular

$$f *_c h = \sqrt{N} \text{IFFT}(\text{FFT}(f) \cdot \text{FFT}(h))$$

através da expressão do lado direito do que a partir da definição da convolução.

Comentário 3.10 Também vale a pena notar que é possível calcular $f * h$ para sinais discretos e finitos através de uma convolução circular – basta escolher N maior do que a **soma dos tamanhos dos sinais** f e h , que são completados com zeros:

$$f = (f_0 \ f_1 \ \dots \ f_{L-1}) \Rightarrow \tilde{f} = (f_0 \ f_1 \ \dots \ f_{L-1} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (\text{tamanho } N \geq L + M - 1)$$

$$h = (h_0 \ h_1 \ \dots \ h_{M-1}) \Rightarrow \tilde{h} = (h_0 \ h_1 \ \dots \ h_{M-1} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (\text{idem})$$

$$\Rightarrow \tilde{f} *_c \tilde{h} = \left(\begin{array}{cccc} \underbrace{f_0 h_0}_{\text{posição } 0} & \underbrace{f_0 h_1 + f_1 h_0}_{\text{posição } 1} & \dots & \underbrace{f_{L-1} h_{M-1}}_{\text{posição } L+M-2} \quad 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{array} \right) \approx f * h$$

Usando um algoritmo como o FFT (em geral, escolhe-se N como uma potência de 2)

$$f * h \approx \tilde{f} *_c \tilde{h} = \sqrt{N} \text{IFFT} \left(\text{FFT}(\tilde{f}) \cdot \text{FFT}(\tilde{h}) \right)$$

e a convolução (não-circular!) do lado esquerdo é calculada através de FFT's (fato que aumenta a confusão entre as diversas Transformadas de Fourier existentes).

Além do comentário acima, há uma outra relação entre a DFT e a DTFT. Partindo de um vetor $f \in \mathbb{C}^N$, monte a seqüência g estendendo f periodicamente, isto é

$$g[n] = f_{n \bmod N}$$

Então

$$\hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha=0}^{N-1} \hat{f}_\alpha \delta \left(w - \frac{\alpha}{N} \right) \quad \text{para } w \in [0, 1)$$

(o lado esquerdo \hat{g} é uma DTFT; no lado direito, \hat{f}_α é uma DFT). Isto é, \hat{g} (em seu período $[0, 1)$) é a soma de impulsos localizados nas frequências $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$ cujas amplitudes são $\hat{f}_0, \hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_{N-1}$, respectivamente. Sucintamente, \hat{f} é uma amostragem de \hat{g} !

Este fato simples permite o cálculo exato da convolução não-finita de sinais discretos $g[n] = f_{n \bmod N}$ (periódico) e $h[n]$ (não necessaria-

mente periódico) via DFTs. De fato, tomando a DTFT de $g * h$:

$$\begin{aligned} \widehat{(g * h)}(w) &= \hat{g}(w) \hat{h}(w) = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a=0}^{N-1} \hat{f}_\alpha \delta\left(w - \frac{\alpha}{N}\right) \right) \hat{h}(w) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a=0}^{N-1} \hat{f}_\alpha \hat{h}\left(\frac{\alpha}{N}\right) \delta\left(w - \frac{\alpha}{N}\right) \end{aligned}$$

Seja agora $v \in \mathbb{C}^N$ a IDFT (finita!) de $\hat{f}_\alpha \hat{h}\left(\frac{\alpha}{N}\right)$, isto é

$$\hat{v}_\alpha = \hat{f}_\alpha \hat{h}\left(\frac{\alpha}{N}\right) \quad \alpha = 0, 1, \dots, N-1$$

(novamente: \hat{v} e \hat{f} são DFTs enquanto \hat{h} é uma DTFT). Comparando a DFT de v com a DTFT de $g * h$ e usando novamente a propriedade supracitada

$$(g * h)[n] = v_{n \bmod N}$$

Resumindo:

Proposição 3.11 *Se g é um sinal discreto periódico (extensão periódica de f cujo tamanho é N) e h é um sinal discreto qualquer, então*

$$g * h = \text{extensão periódica do sinal finito } v$$

$$\text{onde } (DFT(v))_w = (DFT(f))_w \hat{h}\left(\frac{w}{N}\right), \quad w = 0, 1, \dots, N-1$$

sempre que $g * h$ existir.

Este processo será fundamental para o cálculo computacional de convoluções entre dois núcleos infinitos discretos – veja o apêndice sobre convoluções (pense bem: que outra maneira você teria de calculá-las?).

3.3 Transformadas Bidimensionais

A generalização da DFT para o caso bidimensional parte da escolha das dimensões $M \times N$ dos sinais a serem utilizados. A função delta de Dirac e sua propriedade de amostragem são idênticas ao caso discreto. A título de notação, usaremos $I_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Proposição 3.12 *Toda transformação linear (que leva $f : I_M \times I_N \rightarrow \mathbb{R}$ em $Lf : I_M \times I_N \rightarrow \mathbb{R}$) invariante por translações circulares **em ambas as direções** (de I_M e I_N) é dada por uma convolução circular*

$$Lf_{m,n} = (f *_c h)_{m,n} \stackrel{\circ}{=} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} f_{j,k} h_{(m-j) \bmod M, (n-k) \bmod N}$$

onde $h = L\delta$ é a resposta de L ao impulso unitário.

Os autovetores desta convolução circular têm a forma

$$(e_{w_1, w_2})_{m, n} = \frac{1}{\sqrt{MN}} e^{2\pi i (\frac{w_1}{M} m + \frac{w_2}{N} n)} \text{ para } (w_1, w_2) \in I_M \times I_N$$

Definição 3.13 Dada uma matriz (uma imagem monocromática) $f : I_M \times I_N \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a sua **DFT** como

$$\hat{f}_{w_1, w_2} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} f_{j, k} e^{-2\pi i (\frac{w_1}{M} j + \frac{w_2}{N} k)} \text{ para } (w_1, w_2) \in I_M \times I_N$$

Sua inversa é

$$f_{m, n} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{w_1=0}^{M-1} \sum_{w_2=0}^{N-1} \hat{f}_{w_1, w_2} e^{2\pi i (\frac{w_1}{M} m + \frac{w_2}{N} n)}$$

Afirmção 3.14 Valem as propriedades (f e $h : I_M \times I_N \rightarrow \mathbb{R}; \mathbb{I}_{m, n} \equiv 1$)

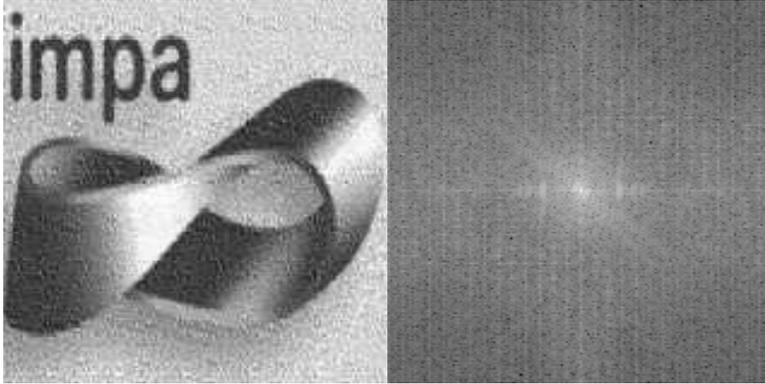
$$\hat{\delta} \equiv \frac{1}{\sqrt{MN}} \mathbb{I}; \hat{\mathbb{I}} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \delta$$

$$\widehat{f *_c h} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \hat{f} \cdot \hat{h}$$

$$\widehat{\hat{f} h} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \hat{f} *_c \hat{h}$$

$$g_{m, n} = f_{(m-\alpha) \bmod M, (n-\beta) \bmod N} \Rightarrow \hat{g}_{w_1, w_2} = \hat{f}_{w_1, w_2} e^{2\pi i (w_1 \frac{\alpha}{M} + w_2 \frac{\beta}{N})}$$

Exemplo 3.15 Exibimos aqui uma imagem monocromática e a sua Transformada de Fourier. A imagem à esquerda foi renormalizada para que preto=0 e branco=1. O brilho da imagem à direita foi alterado para maior visibilidade e sua coordenada (0,0) está no centro da figura.



Novamente, a seguinte afirmação é essencial para o cálculo de convoluções com imagens que são estendidas periodicamente ou por espelhamento.

Afirmção 3.16 *Seja g a extensão periódica de uma imagem f*

$$g[m, n] = f_{m \bmod M, n \bmod N}$$

então

$$(g * h)[m, n] = v_{m \bmod M, n \bmod N}$$

$$\text{onde } \hat{v}_{w_1, w_2} = \hat{f}_{w_1, w_2} \hat{h}\left(\frac{w_1}{M}, \frac{w_2}{N}\right) \quad \forall (w_1, w_2) \in I_M \times I_N$$

3.4 Exercícios

(1) Demonstre as propriedades básicas da convolução circular (Proposição 3.2) e suas versões bidimensionais.

(2) Mostre que os vetores e_w são, de fato, ortonormais (Lema 3.4).

(3) Demonstre as propriedades da DFT (Afirmções 3.8 e 3.14).

(4) Mostre a relação entre a DFT e a DTFT para sinais periódicos

$$g[n] = f_{n \bmod N} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_k \delta[n - (Nj + k)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha=0}^{N-1} \hat{f}_\alpha \delta\left(w - \frac{\alpha}{N}\right) \text{ para } w \in [0, 1).$$

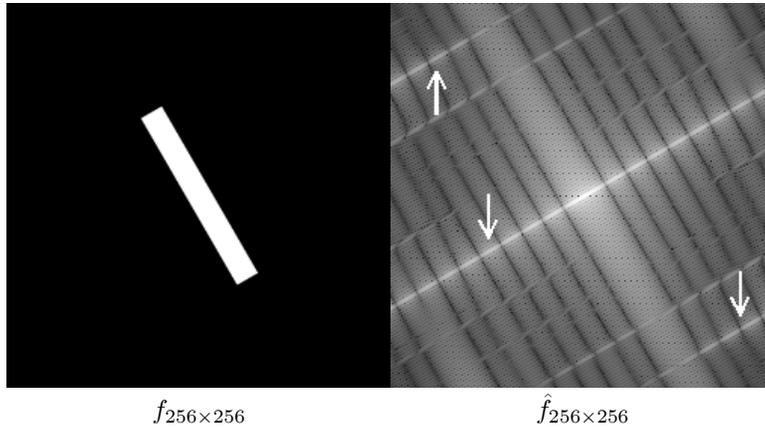
Dica: o valor da DTFT de $\mathbb{I}[n]$ indica que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i a j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k - a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(-k - a)$$

para qualquer a ; você vai querer também usar o escalamento da função delta

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$$

(5) Considere a imagem $f_{j,k}$ a seguir, de tamanho 256×256 (branco= 1, preto= 0). A figura da direita representa a magnitude da DFT de f , cujo brilho foi alterado para maior visibilidade. A frequência $(0, 0)$ corresponde ao **centro** desta figura. As linhas brancas mais fortes são as indicadas pelas setas (de fato, estas eram as únicas razoavelmente visíveis antes da alteração em brilho; mais exatamente, tais “linhas” são compostas por vários segmentos concatenados):



- (a) Calcule a DFT da imagem $M \times N$ dada por $f_{j,k} = \delta[j]$. Há tais linhas?
- (b) Calcule a magnitude da DFT da imagem de um retângulo $(2m + 1) \times (2n + 1)$ com lados paralelos aos eixos, centrado na origem.
- (c) Suponha que $m \gg n$, por exemplo. Há tais linhas? Onde estão as mais fortes? Mostre que tais linhas diminuam de intensidade à medida que nos afastamos da origem do domínio da frequência.
- (d) As figuras acima parecem contradizer (c): do centro para as bordas, vemos uma linha forte (indicada pela seta central), algumas linhas fracas paralelas à central e então duas linhas mais fortes (indicadas pelas outras duas setas). Como explicar esta aparente contradição?

(6) Este exercício requer o auxílio de um programa que calcule a DFT de uma imagem bidimensional e realize operações matemáticas; qualquer bom pacote matemático terá tal capacidade.

(a) Utilize uma imagem teste à sua escolha, digamos, $f[x, y]$. Calcule a sua DFT $\hat{f}[w_1, w_2] = r[w_1, w_2] e^{i\theta[w_1, w_2]}$ e extraia a magnitude $|\hat{f}[w_1, w_2]| = r[w_1, w_2]$ e a fase $e^{i\theta[w_1, w_2]}$. Tente reconstruir a imagem f fazendo a IDFT da magnitude, $\tilde{r}[x_1, x_2]$; você reconhece a imagem original? Tente várias formas de visualização – veja a magnitude, a fase, a parte real e a parte imaginária de \tilde{r} (que é complexa). Faça o mesmo reconstruindo a imagem como a IDFT da fase $e^{i\theta[w_1, w_2]}$. Qual das reconstruções reteve mais características da imagem original?

(b) Agora tome duas imagens f e g de mesmo tamanho. Repita o processo do item anterior obtendo as imagens r_f , $e^{i\theta_f}$, r_g e $e^{i\theta_g}$. Agora multiplique-as para obter $r_f e^{i\theta_g}$ e $r_g e^{i\theta_f}$ e então aplique a IDFT a ambas estas imagens (não se esqueça de visualizá-las em várias formas). Você consegue reconhecer alguma das imagens originais?

(c) De acordo com a análise acima, qual das duas componentes da Transformada de Fourier Discreta parece ser mais importante no reconhecimento de estruturas de uma imagem: a magnitude (amplitude) ou a fase?