

Extração de Malhas Adaptativas com Operações de Simplificação e Refinamento

Adelailson Peixoto^{1*}, Luiz Velho¹

¹Laboratório Visgraf – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA
Estrada D. Castorina, 110 – 22460-320 Rio de Janeiro, RJ

apeixoto@visgrafimpa.br, lvelho@impa.br

Abstract. *This work presents a method for adaptive meshes extraction with important mathematical properties. The generated mesh represents a regular surface from 3D Euclidian space. The input surface may be specified either implicitly or directly as a volumetric object. The method applies simplification to obtain a low resolution initial mesh and applies refinement to obtain a multiresolution representation from base mesh. These combined operations provide nice properties to the mesh.*

Resumo. *Este trabalho apresenta um método de extração de malhas adaptativas com importantes propriedades matemáticas. A malha extraída representa uma superfície regular do espaço euclidiano 3D que pode ser especificada implicitamente ou diretamente como um objeto volumétrico. O processo de extração da malha utiliza operações de simplificação, para obter uma malha inicial em baixa resolução, e operações de refinamento, para obter uma representação em multirresolução da malha. A combinação destas operações fornece importantes propriedades à malha.*

1. Introdução

A geração de malhas é de grande importância em diversas áreas da matemática aplicada como visualização de imagens médica, dinâmica dos fluídos, geociências e outras. Nestas áreas os dados iniciais são comumente representados como *dados volumétricos*, os quais codificam amostras de uma função F em uma grade de pontos tridimensionais, chamados de *voxels*. Cada valor da função F define uma *iso-superfície* dentro do volume que pode ser extraída como uma malha poligonal.

O algoritmo clássico para extração de malhas a partir de volumes é o *Marching Cubes* (MC) [Lorensen and Cline, 1987] que gera triângulos dentro de cada voxel do volume. Outros algoritmos geram a triangulação entre pares de fatias paralelas do dado volumétrico [Barequet and Sharir, 1996], [Cong and Parvin, 1999], [Galín and Akkouche, 1998], [Gitlin et al., 1996]. Como estes algoritmos extraem malhas com resolução constante e amostragem uniforme e, em geral, dados volumétricos são muito grandes (da ordem de gigabytes), as malhas geradas chegam a possuir milhões

*Financiado pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e CAPES.

de triângulos. Com isto, o uso de tais malhas pode se tornar impraticável em uma série de aplicações como *rendering*, eliminação de ruídos, transmissão de dados e outras.

O ideal é que em tais aplicações mantenha-se o devido controle da resolução da malha, ou melhor, a malha esteja representada em multirresolução [Eck et al., 1995]. Esta representação é definida como um conjunto de malhas $\{M_0, \dots, M_n\}$, de modo que o número de vértices, arestas e faces da malha M_i varie monotonicamente com i e exista uma relação de dependência entre os triângulos de dois níveis consecutivos i e $i + 1$. A multirresolução pode ser obtida por processos de *simplificação* e por *refinamento*.

Métodos de simplificação atuam em malhas super amostradas, criando malhas com resoluções menores [Garland and Heckbert, 1996], [Hoppe, 1997]. Alguns métodos obtêm uma malha inicial super amostrada (usando, por exemplo, o MC), e em seguida aplicam processos de simplificação, seguidos de métodos de *decimação* [Heckbert and Garland, 1997] e de *remeshing* [Kobbelt et al., 1999]. Estes métodos podem se mostrar inadequados por uma série de razões: alto custo de processamento, devido aos milhões de polígonos da malha inicial ; como malhas extraídas com o MC são bastante irregulares, as malhas em multirresolução resultantes também são muito irregulares; em muitas aplicações como compressão de malhas, transmissão de dados na rede e reconstrução de malhas adaptativas, a abordagem da simplificação se mostra inadequada, ou seja, em vez de se obter malhas de baixa resolução a partir de malhas de alta resolução, estas aplicações requerem uma abordagem inversa: seria mais natural obter uma malha inicial em baixa resolução e, aos poucos acrescentam-se detalhes à malha (aumentando a resolução) até que a resolução ideal seja atingida. Esta abordagem é utilizada pelos métodos de refinamento [Wood, 2000], [Gavriliu et al., 2001].

Este trabalho apresenta um método de extração de malhas adaptativas que procura combinar operações de simplificação e refinamento, de modo que as malhas apresentem um conjunto de importantes propriedades, conforme descrito na próxima seção.

2. Descrição Geral do Método

O novo método apresentado extrai a malha em multirresolução, a partir de um volume, em duas etapas principais: simplificação e refinamento.

A etapa da simplificação gera uma malha inicial em baixa resolução, chamada *malha base*, que contém a topologia correta da iso-superfície. Para tal, primeiro é gerado um conjunto G de pontos estruturados e super amostrados, chamado de *grafo de conectividade*, que contém toda geometria e topologia da iso-superfície contida no volume. Sobre o conjunto G será gerado um conjunto de discos, chamado de *cobertura de discos*, cujos centros definirão os vértices da malha base. A partir do conjunto de discos será criado um conjunto chamado de *cobertura de Voronoi*, que será usado para gerar os triângulos da malha base. Esta etapa está descrita na seção 3.

Na etapa do refinamento é gerada uma hierarquia de malhas a partir da malha base. Esta etapa consiste basicamente de dois operadores que são aplicados simultaneamente à malha: subdivisão e adaptação dos triângulos. A operação de subdivisão dos triângulos acrescenta novos vértices, arestas e triângulos à malha. A etapa de adaptação calcula as posições dos novos vértices, ajustando-os à iso-superfície. A etapa do refinamento está descrita na seção 4. A figura 1 mostra a descrição geral do método.

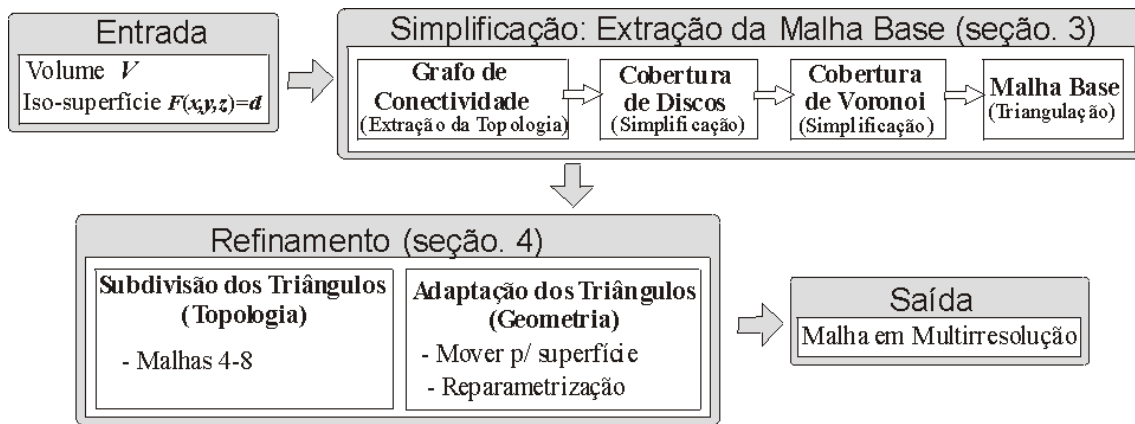


Figura 1: Esquema geral do método.

O método proposto apresenta as seguintes propriedades:

- As malhas geradas possuem a topologia correta dos objetos.
- Os triângulos das malhas possuem boa razão de aspecto.
- Capacidade de extração de malhas com borda e de malhas sem borda.
- Pode ser aplicado para reconstrução de objetos conexos e objetos desconexos.
- As malhas possuem representação em multirresolução e são semi-regulares.
- As malhas convergem corretamente para a iso-superfície.
- O refinamento é adaptativo.
- A subdivisão dos triângulos durante o refinamento é consistente.

3. Simplificação

A simplificação é baseada no trabalho [Gavriliu et al., 2001], no qual as malhas extraídas em multirresolução apresentam triângulos com boa razão de aspecto. Porém, o processo utilizado em nosso método extrai uma malha base inicial em baixa resolução, enquanto em [Gavriliu et al., 2001] o mesmo processo é empregado repetidas vezes para extrair diversas malhas em diferentes resoluções. As próximas seções descrevem tal processo.

3.1. Grafo de Conectividade

O objetivo desta etapa é extrair a topologia e geometria da iso-superfície em sua mais alta resolução. Um *surfel* é um pedaço da superfície, formado pela interseção de um voxel com a iso-superfície (figura 2a). Um *nó* é a interseção de um surfel com uma aresta de um voxel. Um *c-vértice* (vértice candidato) v é associado a cada surfel e as coordenadas de v são a média das coordenadas dos nós do surfel associado a v . Dois *c-vértices* são vizinhos se seus surfels correspondentes compartilharem pelo menos um nó. Dois *c-vértices* vizinhos u e v definem aresta e de G , cujo peso é a distância euclidiana entre u e v . O grafo G é definido pelo conjunto de *c-vértices* e arestas calculados sobre a iso-superfície no volume. A figura 2c mostra o grafo correspondente ao volume da figura 2b.

3.2. Cobertura de Discos

O objetivo desta etapa é selecionar um conjunto de *c-vértices* do grafo G que definirão os vértices da malha base. Dado um ponto $p \in S$, onde S é uma superfície regular,

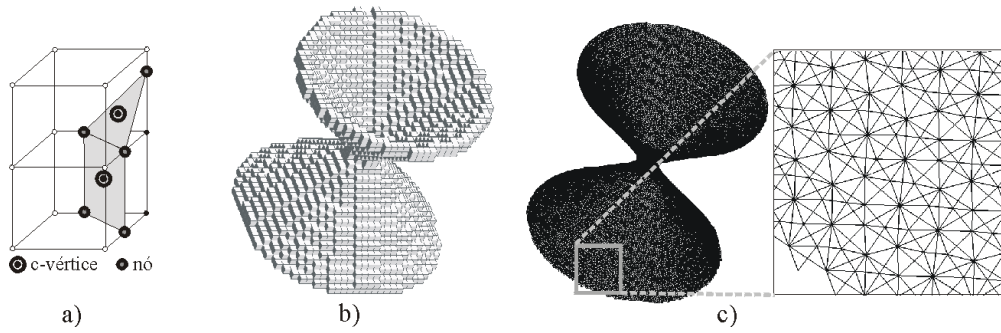


Figura 2: a) Surfel. b) Volume. c) Grafo G (em destaque, uma região do grafo).

existe uma vizinhança aberta de p homeomorfa a um disco planar [Carmo, 1976]. Esta vizinhança $D \subset S$ é chamada de um *disco* sobre S . Quando para todo $p \in S$ existir algum disco D sobre S , com $p \in D$, diz-se que há uma *cobertura de discos* C_S associada a S . O objetivo é construir uma cobertura de discos C_G associada ao grafo G . Os centros dos discos de C_G definirão os vértices da malha base. Para que os triângulos da malha base possuam boa razão de aspecto, serão impostas duas restrições topológicas à cobertura C_G (figura 3a): primeira, nenhum disco de C_G contém o centro de outro disco. A segunda é que os raios de quaisquer dois discos que se interceptarem não podem diferenciar por um fator maior que 2.

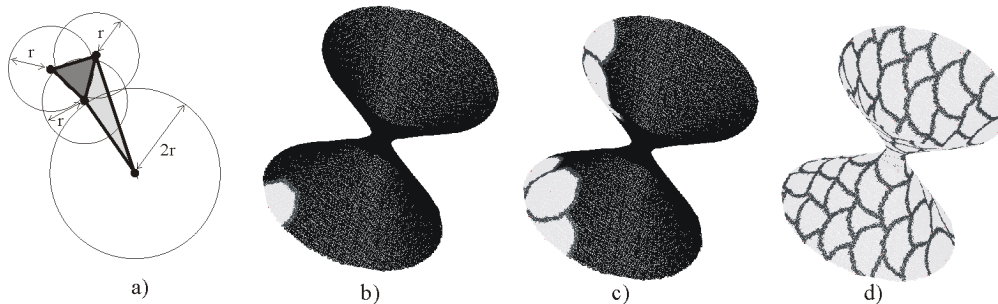


Figura 3: a) Restrições. b) Um disco gerado. c) Vários discos. d) Cobertura C_G .

A construção da cobertura C_G é feita a partir das definições discretas de *geodésica* e *disco*. A geodésica $geod_{u,v}$, $u, v \in G$, é a curva sobre o grafo G formada por todos os c-vértices que minimizam a distância entre u e v . O comprimento de $geod_{u,v}$ é referenciado por $leng_{u,v}$. Um disco D_v^r , com centro $v \in G$ e raio $r \in \mathbb{R}$, é o conjunto formado por todos os c-vértice $w \in G$ tal que $leng_{w,v} \leq r$. A implementação de um disco é baseada no princípio de propagação de frentes: A geração de um disco começa no seu centro e vai avançando pelos c-vértices vizinhos, até que a distância dos c-vértices ao centro atinja o raio do disco. Para garantir que os discos sempre serão homeomorfos a discos planares, não se deve permitir que a borda de um disco se auto-intercepte ou que a borda desapareça. Se isto acontecer, diz-se que há um *evento topológico* na superfície. Nestes casos, para que o evento desapareça, o disco deve ter seu raio reduzido. A redução do raio deve ser sempre à metade, devido às restrições descritas acima. As figuras 3a e b mostram a geração de discos sobre G . Uma implementação eficiente de C_G pode ser encontrada em [Peixoto, 2002].

3.3. Cobertura de Voronoi

O objetivo desta etapa é estabelecer a conectividade entre os centros dos discos da cobertura C_G , para triangular a malha base. Dado um disco $D_v^{Rv} \in C_G$, define-se uma *célula de Voronoi* $V_C^G(v)$ como o conjunto de c -vértice $w \in G$, tal que para qualquer outro disco $D_u^{Ru} \in C_G$, $leng_{w,v} < leng_{w,u}$. Uma *cobertura de Voronoi* V_C^G é o conjunto de todas as células de Voronoi definidas em C_G . A cobertura de Voronoi V_C^G calculada sobre C_G define uma partição sobre o grafo G e o seu dual define uma triangulação dos centros das células (malha base). Uma implementação eficiente de V_C^G e do seu dual pode ser encontrada em [Peixoto, 2002].

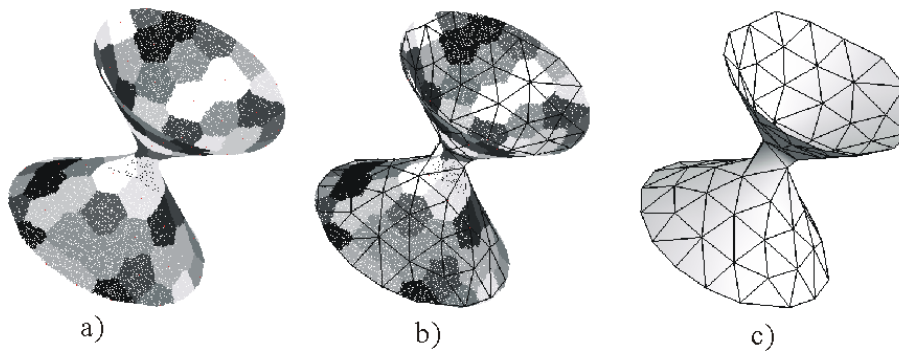


Figura 4: a) Cobertura de Voronoi. b) Dual. c) Triangulação (malha base).

4. Refinamento

Operações de refinamento são aplicadas a um triângulo T se sua variância $V_T(d) > \delta$ [Wood, 2000]. V_T é calculada sobre um conjunto de distâncias entre T e a iso-superfície: $V_T(d) = M(d^2) - M(d)$, onde M denota a média de seus argumentos. O refinamento é aplicado em duas etapas simultâneas: subdivisão (altera a conectividade da malha) e adaptação (altera a geometria da malha).

4.1. Subdivisão

A subdivisão dos triângulos é baseada nas *malhas 4-8 com resolução variável*, cuja conectividade é equivalente a *tilings* ou partições $[4.8^2]$ de Laves [Velho and Gomes, 2000]. Estes tilings correspondem a partições do plano definidas por triângulos retângulo isósceles e seus vértices possuem valência 4 e 8 alternadamente. A estrutura básica dos tiling $[4.8^2]$ de Laves é um par destes triângulos que define um quadrado como bloco básico. A principal vantagem deste esquema é que ele utiliza *bisseção* como operação básica do refinamento, em vez de utilizar esquemas de subdivisão mais complexos comumente utilizados para refinar faces e vértices. Uma operação de bisseção é aplicada à aresta interna do bloco básico, subdividindo o bloco em 4 triângulos. A estrutura das malhas 4-8 é apropriada para refinamento adaptativo, pois, mesmo quando aplicado a refinamentos não uniforme (onde nem todos os triângulos são subdivididos), há garantias de que a malha se mantém conforme. Este processo de refinamento permite a criação de malhas semi-regulares.

4.2. Adaptação

Quando uma aresta $e = (v_1, v_2)$ é subdividida por bisseção, um novo vértice v é adicionado à malha, entre v_1 e v_2 . As coordenadas de v devem ser calculadas de modo que os triângulos se adaptem à iso-superfície. As operações que o método aqui apresentado aplicam à geometria da malha são: mover os vértices na direção da iso-superfície e reparametrizar os vértices para suavizar a malha.

O movimento do vértice v (com coordenadas p) em direção à iso-superfície S é realizado pela aplicação do operador $F_S(p) = -T_S(p)\nabla T_S(p)$ [Ohtake et al., 2001]. Na nossa definição de F_S , $T_S(p)$ é a função distância (com sinal) entre p e a iso-superfície. Um problema ocorre se a aresta de subdivisão e interceptar o eixo medial da iso-superfície: é possível que o novo vértice v seja movido na direção errada. Assim, de um modo geral, esta formulação de F_S não consegue decidir a direção correta para onde v deve ser movido. Em [Ohtake et al., 2001] F_S funciona bem porque tem-se garantias de que os vértices estão situados em uma vizinhança da iso-superfície e, portanto, arestas de subdivisão não interceptam o eixo medial. Além disto, em [Ohtake et al., 2001], este operador só é aplicado a malhas com resolução constante, enquanto aqui a resolução da malha está variando.

Para garantir o deslocamento correto dos vértices, nosso método utiliza então um outro operador, definido pela geodésica $geod_{v_1, v_2}$: quando a aresta (v_1, v_2) é refinada, o novo vértice v é movido para o ponto médio de $geod_{v_1, v_2}$ calculada sobre o grafo G . Se v_1 (ou v_2) estiver no bordo da malha base, então deve ser movido para o bordo de G antes do cálculo de $geod_{v_1, v_2}$. Se v_1 e v_2 estiverem no bordo da malha, então, além de movê-los para o bordo de G , o cálculo de $geod_{v_1, v_2}$ deve ser feito em relação ao bordo de G . Este processo está implementado em [Peixoto, 2002].

Após o deslocamento de v , é aplicada uma reparametrização a v para suavizar a malha. Este processo é realizado através da componente tangencial F_T do operador laplaciano U , definido como [Ohtake et al., 2001], [Wood, 2000]: $U(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p_i - p)$, onde p são as coordenadas de v e os p_i s são as coordenadas dos vizinhos de v . A componente F_T é definida como $F_T(p) = \tau[U(p) - (U(p) \cdot \vec{n})\vec{n}]$, onde τ é uma constante e \vec{n} a normal a v . Após a suavização da malha é aplicado o operador F_S para reaproximar os vértices da iso-superfície.

5. Resultados, Conclusões e Trabalhos Futuros

A convergência da malha para a iso-superfície foi analisada a partir de um erro $\epsilon_{arestas}$ calculado nas arestas da malha, e de um erro $\epsilon_{normais}$, calculado nas normais dos triângulos [Ohtake et al., 2001]. O primeiro é definido como $\epsilon_{arestas} = \frac{1}{\sum_{\forall T} A(T)} \sum_{\forall e} U(e)$, onde $A(T)$ é a área de cada triângulo T , $U(e) = D(p)^2(A(T_1) + A(T_2))/2$ é o erro avaliado em cada aresta e , $D(p)$ é a distância do ponto médio p (de e) à superfície e $A(T_1)$ e $A(T_2)$ são respectivamente as áreas dos triângulos T_1 e T_2 que compartilham a aresta e .

O outro erro é definido como $\epsilon_{normais} = \frac{1}{\sum_{\forall T} A(T)} \sum_{\forall T} [A(T)(1 - |n(T) \cdot m(T)|)]$, onde $m(T)$ é o vetor normal unitário ao centro de T e $n(T)$ é o vetor normal unitário a T .

A figura 5 mostra a malha base (gerada de um volume reconstruído de imagens 2D) e a malha refinada. A malha base possui 102 triângulos e a refinada 13834. A malha extraída com o MC (detalhe da mão no retângulo de baixo) possui 39645 triângulos.

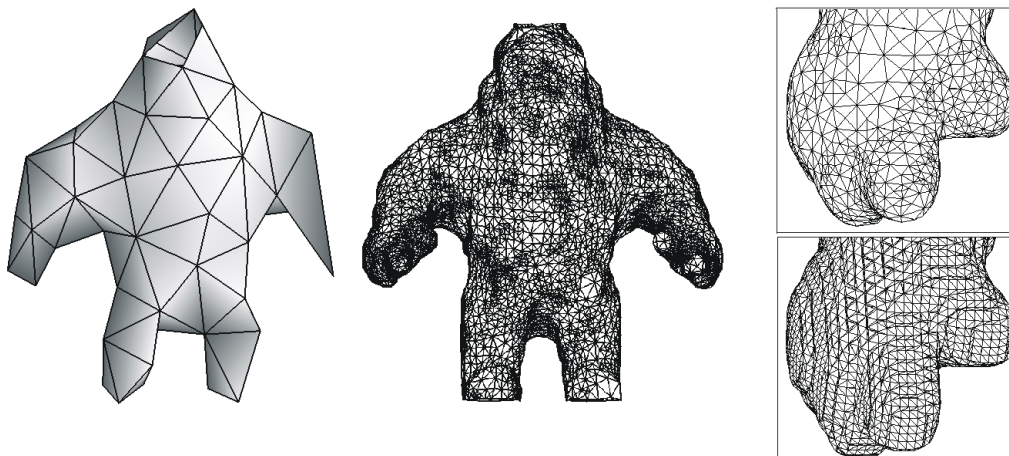


Figura 5: Malhas base e refinada e detalhe da mão: nosso método (acima) e MC.

As figuras 6a e 6b mostram os erros $\epsilon_{arestas}$ e $\epsilon_{normais}$ e a figura 6c compara as razões de aspectos dos triângulos da malha final do nosso método (MM) com a malha do MC.

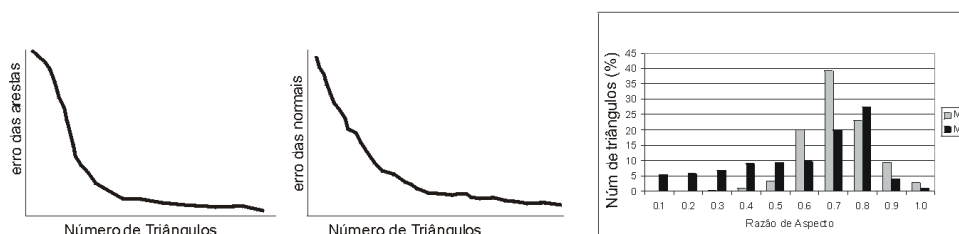


Figura 6: Gráficos de $\epsilon_{arestas}$ e $\epsilon_{normais}$ e Histograma das razões de aspecto.

Apresentamos um método de extração de malhas que combina operações de simplificação e refinamento, fornecendo à malha um conjunto de propriedades não fornecido por nenhum outro método. O método baseia-se principalmente em [Gavriliu et al., 2001] e [Wood, 2000] e aplica importantes definições de [Velho and Gomes, 2000] e [Ohtake et al., 2001]. As principais vantagens do nosso método em relação a [Gavriliu et al., 2001] são: só geramos D_G , V_C^G e o dual uma vez (malha base); estabelecemos, pela estrutura 4-8, uma relação hierárquica entre malhas de diferentes resoluções; geramos malhas semi-regulares. As principais vantagens em relação à [Wood, 2000] são: extraímos malhas com borda e malhas desconexas; nosso processo de subdivisão baseia-se em simples operações de bisseção, já em [Wood, 2000] são necessárias várias operações para que a malha permaneça conforme.

Trabalhos futuros incluem a definição de:

- Operadores que mantenham características como quinas, durante o refinamento.
- Critérios para a escolha dos centros dos discos.
- Critérios para decidir quando um vértice pode ser movido com o operador F_S , em vez da geodésica, que encarece o refinamento.

Referências

- Barequet, G. and Sharir, M. (1996). Piecewise-linear interpolation between polygonal slices. *Computer Vision and Image Understanding*, 6(2):251–272.
- Carmo, M. P. d. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall.
- Cong, G. and Parvin, B. (1999). An algebraic solution to surface recovery from cross-sectional contours. *Graphical Models and Image Processing*, 61:222–243.
- Eck, M., DeRose, T., Duchamp, T., Hoppe, H., Lounsbery, M., and Stuetzle, W. (1995). Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *Proceedings of SIGGRAPH '95*, pages 173–182.
- Galín, E. and Akkouche, S. (1998). Fast surface reconstruction from contours using implicit surfaces. *Implicit Surface '98. Eurographics and ACM SIGGRAPH*, pages 139–144.
- Garland, M. and Heckbert, P. S. (1996). Surface simplification using quadric error metrics. *SIGGRAPH*, pages 209–216.
- Gavriliu, M., Carranza, J., Breen, D., and Barr, A. (2001). Fast extraction of adaptive multiresolution meshes with guaranteed properties from volumetric data. *Proceedings of IEEE Visualization*, pages 295–302.
- Gitlin, C., O'Rourke, J., and Subramanian, V. (1996). On reconstructing polyhedral from parallel slices. *International Journal of Comp. Geometry and Applications*, 6(1):103–122.
- Heckbert, P. and Garland, M. (1997). Survey of polygonal surface simplification algorithms. Technical report, Carnegie Mellon University.
- Hoppe, H. (1997). Progressive meshes. *Proceedings of SIGGRAPH*, pages 189–198.
- Kobbelt, L. P., Vorsatz, J., Labsik, U., and Seidel, H. P. (1999). A shrink wrapping approach to remeshing polygonal surfaces. *Computer Graphics Forum*, 18(3):119–130.
- Lorensen, W. E. and Cline, H. E. (1987). Marching cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm. *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH '87)*, 21(4):163–169.
- Ohtake, Y., Belyaev, A., and Pasko, A. (2001). Dynamic meshes for accurate polygonization of implicit surfaces with sharp features. *Shape Modeling International*, pages 74–81.
- Peixoto, A. (2002). *Extração de malhas adaptativas em multi-resolução a partir de volumes, usando refinamento e simplificação*. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Velho, L. and Gomes, J. (2000). Variable resolution 4-k meshes: Concepts and applications. *Computer Graphics Forum*, 19(4):195–214.
- Wood, Z. J. (2000). Semi-regular mesh extraction from volumes. Master's thesis, California Institute of Technology.