

Subdivision des courbes sur les surfaces avec contrôle de la longueur d'arc

J. Estrada-Sarlabous¹, V. Hernández-Mederos¹, D. Martínez-Morera², L. Velho³

¹ICIMAF, Cuba

²UFAL, Brésil

³IMPA, Brésil

Abstract

Dans ce travail, nous présentons un nouveau schéma de subdivision des courbes non-linéaire et interpolatoire, adapté à la conception des courbes sur les surfaces.

Nous montrons que le schéma converge et que la courbe de subdivision est continue. De plus, en commençant avec une certaine paramétrisation naturelle du polygone initial on obtient une courbe de subdivision paramétrée par un multiple de la longueur d'arc.

1. Introduction

Les courbes de subdivision sont très importantes pour plusieurs applications dans la science et l'ingénierie. Dans l'espace euclidien R^n , ils sont faciles à définir à partir d'un petit ensemble de points de contrôle. Le schéma de subdivision est un processus itératif qui converge, en quelques millisecondes, à la courbe limite. Dans ce cadre, existent de nombreuses références sur la convergence de ces schémas.

Compte tenu de leurs bonnes propriétés et des avantages de l'utilisation de ces courbes de subdivision, il est naturel de les étendre aux géométries non euclidiennes, comme les variétés de Riemann, les groupes de Lie ou les triangulations. Dans [PR95, CKS99, PH05] on peut trouver certaines de ces extensions.

Dans ce travail, nous proposons une méthode simple pour définir un schéma de courbes de subdivision sur des surfaces S , qui est facile à mettre en œuvre sur des triangulations. Sous des restrictions faibles, la courbe limite du schéma proposé est une courbe continue sur S . La possibilité de obtenir des courbes de subdivision avec un degré plus haut de continuité n'a pas été explorée dans ce travail, puisque cela dépend aussi de la continuité des surfaces S .

Le schéma classique de 4 points [Dub86, DLG87] est l'un des premières et le plus populaires schémas des courbes

de subdivision interpolatoires. Il s'agit d'un membre de la famille de schémas de subdivision du type Deslauriers-Dubuc [DD89], où les nouveaux points sont situés sur une courbe polynomiale qui interpole 4 sommets consécutifs du polygone de contrôle. Plus précisément, à partir d'un polygone initial $P^0 = \{P_i^0, i \in Z\}$ le schéma classique de 4 points est défini par les équations

$$P_{2i}^{j+1} = P_i^j, \quad P_{2i+1}^{j+1} = g_i^j(t_{2i+1}^{j+1}) \quad (1)$$

où $g_i^j(t)$ est la courbe polynôme cubique qui interpole les points P_k^j aux valeurs uniformes des paramètres $t_k^j = k/2^j$ pour $k = i-1, i, i+1, i+2$, et $t_{2i+1}^{j+1} = (2i+1)/2^{j+1}$.

Plusieurs auteurs [KS98, DFH09] ont remarqué que la courbe limite est très proche des arêtes longues et très loin des arêtes courtes, voir la figure 1, à gauche. Il s'agit d'un résultat de la paramétrisation uniforme: pour tous i le même temps est utilisée pour voyager entre deux points consécutifs P_i^0, P_{i+1}^0 du polygone initial, quelque soit leur distance. En d'autres termes, la courbe limite du schéma classique de 4 points est loin d'être paramétrée par la longueur d'arc.

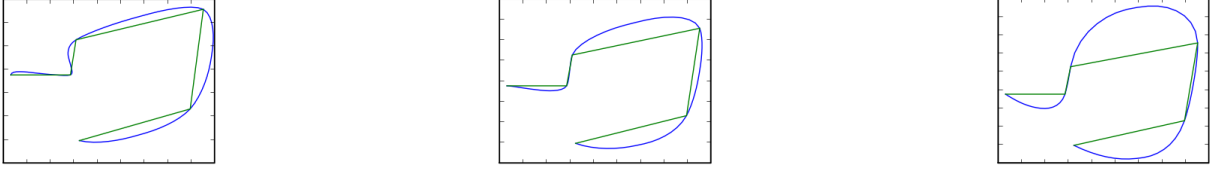


Figure 1: Des courbes limites des schémas de subdivision de 4 points (1) avec la paramétrisation initiale (2) et $\beta = 0$ (à gauche), $\beta = 0.5$ (au milieu) and $\beta = 1$ (à droite)

Une possibilité d'aborder ce problème consiste à utiliser une paramétrisation non-uniforme du polygone initial P^0

$$t_{i+1}^0 = t_i^0 + \|P_{i+1}^0 - P_i^0\|^\beta \quad (2)$$

Les valeurs des paramètres de l'étape $j+1$, sont calculés à partir des paramètres de l'étape précédente en tant que

$$t_{2i}^{j+1} = t_i^j, \quad t_{2i+1}^{j+1} = \frac{t_i^j + t_{i+1}^j}{2} \quad (3)$$

Prenant cette idée un peu plus loin, dans [DFH09], une reparamétrisation est introduit dans chacune des étapes, défini par la équation

$$t_i^j = 0, \quad t_{i+1}^j = t_i^j + \|P_{i+1}^j - P_i^j\|^\beta \quad (4)$$

Les points à l'étape $j+1$ sont donnés par $P_{2i}^{j+1} = P_i^j$, $P_{2i+1}^{j+1} = g_i^j((t_i^j + t_{i+1}^j)/2)$, où $g_i^j(t)$ est la courbe polynômiale cubique que interpole les points (t_k^j, P_k^j) pour $k = i-1, i, i+1, i+2$. La courbe limite de ce schéma non-linéaire est lisse et, quand la paramétrisation centripète est utilisé, il est relativement proche au polygone initial et sa forme est agréable.

Dans la figure 1, nous montrons les courbes limites des schémas de subdivision de 4 points correspondants à différentes valeurs de β . Notez que le changement de la paramétrisation du polygone initial affecte la forme de la courbe limite.

Motivés par l'idée de obtenir un contrôle plus strict sur la géométrie des courbes limites par moyen d'un schéma de subdivision non-linéaire simple, dans [HEIM09] est présenté un schéma de subdivision non-linéaire, non-stationnaire et interpolatoire, dont la courbe limite est continue et paramétrée par un multiple de la longueur d'arc. Les polygones intermédiaires P^j sont fourni avec des paramétrisations non-uniformes reflètent la relation entre la longueur de l'arête $P_i^j P_{i+1}^j$ du polygone P^j , et la longueur du souspolygone de P^{j+1} obtenu en appliquant le schéma de subdivision à $P_i^j P_{i+1}^j$.

Sur la base de ce résultat, il devient une idée naturelle de

tenter d'étendre ce schéma de subdivision à une surface S de la manière la plus intrinsèque possible, à savoir, en utilisant la géométrie de S .

Le problème de la conception des courbes sur les variétés lisses a été abordée dans plusieurs travaux [PR95, RLJ05, PH05], et aussi sur des triangulations [MCV07]. Dans les dernières années, certains cadres généraux pour étendre des schémas de subdivision linéaires sur les variétés lisses et discrets ont été définis [WP06, Wal06, WD05, MVC05].

Dans ce travail, nous prenons un autre chemin. Nous traduisons les idées géométriques de [HEIM09] à la géométrie de la variété. Ce faisant, nous sommes capables de prouver certaines propriétés des nouvelles courbes de subdivision, qui sont définies maintenant sur une variété, d'une manière similaire à [HEIM09].

Selon le schéma de subdivision proposée dans le présent travail, les nouveaux points ne reposent pas nécessairement sur le courbe polynômiale cubique (1). Au lieu de cela, nous prenons une paramétrisation t^0 du polygone initial P^0 , calculé à partir des longueurs d'arc ρ_i^0 des courbes géodésiques sur S joignant deux sommets consécutifs P_i^0 et P_{i+1}^0 , et nous contrôlons la longueur du j -ème polygone de subdivision P^j , de telle manière que, après k étapes de subdivision de l'arête $P_i^j P_{i+1}^j$ du polygone P^j , la longueur du polygone obtenu tend à être proportionnelle, avec le même facteur de proportionnalité pour tout i , à la longueur de l'intervalle paramétrique $t_{i+1}^j - t_i^j$ correspondant à la paramétrisation t^j associée à P^j . En plus, la courbe limite est continue et il est *environ* paramétrée par un multiple de la longueur d'arc.

Une borne supérieure pour la distance de Hausdorff entre la courbe limite et le polygone initial est obtenue.

Le schéma de subdivision proposé est non-linéaire, donc nous ne pouvons pas étudier ses propriétés par le biais du formalisme des polynômes de Laurent [Dyn92]. Au lieu de cela, nos arguments reposent sur des techniques analytiques

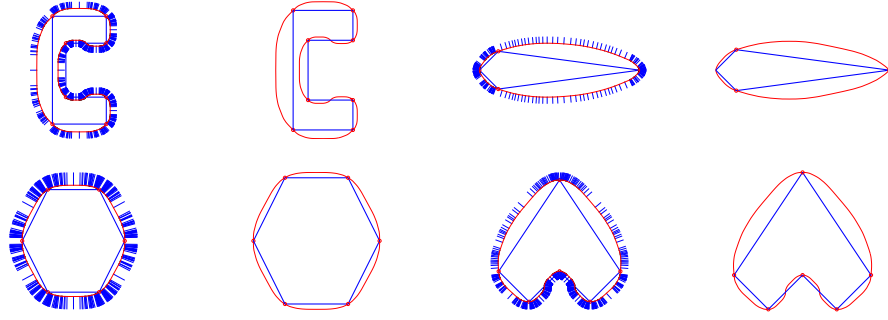


Figure 2: Après 6 itérations du schéma de subdivision [HEIM09]

et géométriques qui sont spécifiques de ce type du schéma de subdivision.

2. Le schéma de subdivision

2.1. Définitions générales

Soit $P^0 = \{P_i^0, i \in Z\}$ un polygone avec des sommets sur une surface donnée S , où trois sommets consécutifs sont toujours non-alignés. Les équations donnant le polygone à l'étape $j+1$ peuvent être écrites comme

$$P_{2i}^{j+1} = P_i^j, \quad P_{2i+1}^{j+1} = g_i^j(P_{i+1}^j, P_i^j, \alpha^j) \quad (5)$$

où P_{2i+1}^{j+1} est un point de S et les paramètres de contrôle $\alpha^j > 1$ satisfont à la condition

$$\alpha := \prod_j \alpha^j < \infty \quad (6)$$

Pour toute paire de points $Q_1, Q_2 \in S$ nous désignerons par $d_g(Q_1, Q_2)$ la longueur d'arc de la *courbe géodésique* sur S avec le point initial Q_1 et le point final Q_2 (nous utilisons le terme *courbe géodésique* pour appeler la *courbe localement plus courte*, dans le cas d'une surface lisse S , et pour appeler la *courbe géodésique plus courte*, dans le cas d'une triangulation S , voir [MMP87, PS98]). En particulier, pour deux sommets consécutifs du polygone P^k , $P_{r+1}^k, P_r^k \in S$, nous noterons $d_g(P_r^k, P_{r+1}^k)$ par ρ_r^k . Le nouveau sommet $P_{2i+1}^{j+1} = g_i^j(P_{i+1}^j, P_i^j, \alpha^j)$ est calculé de telle manière que, pour un paramètre donné $\alpha^j > 1$

$$\rho_{2i}^{j+1} + \rho_{2i+1}^{j+1} = \alpha^j \rho_i^j \quad (7)$$

La condition (7) signifie que le nouveau point P_{2i+1}^{j+1} appartient à l'ensemble

$$E_g := \{Q \in S / d_g(Q, P_i^j) + d_g(Q, P_{i+1}^j) = \alpha^j \rho_i^j\} \quad (8)$$

En raison de sa similitude avec la définition classique d'une ellipse, nous appellerons cet ensemble *ellipse géodésique* sur S avec des foyers P_i^j, P_{i+1}^j et l'excentricité $1/\alpha^j$.

2.2. Convergence

Pour étudier la convergence des schémas de subdivision, d'abord nous définissons les valeurs paramétriques correspondant à chaque sommet du polygone de subdivision P^j . Les valeurs des paramètres des points quelconques situés sur P^j sont calculées par interpolation linéaire des valeurs des paramètres des sommets voisins.

Pour la paramétrisation non-uniforme t^0 du polygone P^0 , on pose:

$$t_0^0 = 0, \quad t_{i+1}^0 = t_i^0 + \rho_i^0 \quad (9)$$

La paramétrisation t^{j+1} du polygone P^{j+1} est défini comme suit. Nous assignons $t_{2i}^{j+1} = t_i^j$ aux paramètres avec des indices pairs et aux paramètres avec des indices impaires, t_{2i+1}^{j+1} , nous assignons des valeurs dans $[t_i^j, t_{i+1}^j]$ de telle sorte que

$$\frac{t_{2i+1}^{j+1} - t_i^j}{\rho_{2i}^{j+1}} = \frac{t_{i+1}^j - t_{2i+1}^{j+1}}{\rho_{2i+1}^{j+1}}$$

C'est à dire,

$$t_{2i}^{j+1} = t_i^j, \quad t_{2i+1}^{j+1} = \delta_i^j t_i^j + (1 - \delta_i^j) t_{i+1}^j \quad (10)$$

avec $\delta_i^j = \frac{\rho_{2i+1}^{j+1}}{\rho_{2i}^{j+1} + \rho_{2i+1}^{j+1}}$.

Théorème 1 Considerons le schéma de subdivision (5)-(7) avec la paramétrisation (9)-(10). Si les nouveaux points P_{2i+1}^{j+1} sont choisis de telle manière que, pour tous i, j

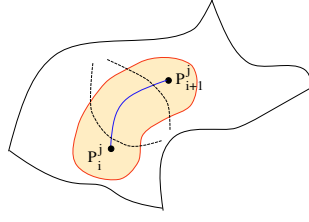


Figure 3: Condition suffisante de convergence

$$\rho_k^{j+1} \leq \Gamma \rho_i^j \text{ pour } k = 2i, 2i+1 \text{ avec } \Gamma < 1 \quad (11)$$

alors le schéma de subdivision converge et la courbe limite $c(t)$ est continue.

Démonstration Soit $P^j(t)$ le spline linéaire que interpole des points (t_i^j, P_i^j) . Nous allons montrer que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P^j(t) - P^{j+1}(t)\|_\infty = 0$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|P^j(t) - P^{j+1}(t)\|_\infty &= \\ \max_i \max_{t_i^j \leq t_{i+1}^j} \|P^j(t) - P^{j+1}(t)\| &= \\ \max_i \|P^j(t_{2i+1}^{j+1}) - P^{j+1}(t_{2i+1}^{j+1})\| & \quad (12) \end{aligned}$$

La fonction $P^j(t)$ est linéaire pour $t \in [t_i^j, t_{i+1}^j]$ et t_{2i+1}^{j+1} est donné par (10), Donc, on obtient,

$$P^j(t_{2i+1}^{j+1}) = \delta_i^j P_i^j + (1 - \delta_i^j) P_{i+1}^j \quad (13)$$

En substituant (13) et la valeur de δ_i^j (10) dans (12), on obtient, rappelant que $P^{j+1}(t_{2i+1}^{j+1}) = P_{2i+1}^{j+1}$,

$$\begin{aligned} \|P^j - P^{j+1}\|_\infty &= \max_i \|P_{2i+1}^{j+1} - (\delta_i^j P_i^j + (1 - \delta_i^j) P_{i+1}^j)\| = \\ \max_i \|\delta_i^j (P_{2i+1}^{j+1} - P_i^j) + (1 - \delta_i^j) (P_{2i+1}^{j+1} - P_{i+1}^j)\| &\leq \\ \max_i \{\delta_i^j \|P_{2i+1}^{j+1} - P_i^j\| + (1 - \delta_i^j) \|P_{2i+1}^{j+1} - P_{i+1}^j\|\} &\leq \\ \max_i \{\delta_i^j \rho_{2i}^{j+1} + (1 - \delta_i^j) \rho_{2i+1}^{j+1}\} &\leq \\ 2 \max_i \left\{ \frac{\rho_{2i+1}^{j+1} \rho_{2i}^{j+1}}{\alpha^j \rho_i^j} \right\} & \quad (14) \end{aligned}$$

car $P_r^k = P_{2r}^{k+1}$ et, $\|P_{r+1}^k - P_r^k\|$, la distance euclidienne de P_r^k à P_{r+1}^k , est plus petite que la distance géodésique (sur S) de P_r^k à P_{r+1}^k , ρ_r^k .

En utilisant (7) et l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique, on obtient

$$2 \frac{\rho_{2i+1}^{j+1} \rho_{2i}^{j+1}}{\alpha^j \rho_i^j} = 2 \frac{\rho_{2i+1}^{j+1} \rho_{2i}^{j+1}}{\rho_{2i+1}^{j+1} + \rho_{2i}^{j+1}} \leq \frac{\rho_{2i+1}^{j+1} + \rho_{2i}^{j+1}}{2} = \frac{\alpha^j \rho_i^j}{2}$$

Par conséquent, à partir de (14) on obtient,

$$\|P^j(t) - P^{j+1}(t)\|_\infty \leq \frac{\alpha^j}{2} \max_i \{\rho_i^j\}$$

En supposant (11), on obtient

$$\begin{aligned} \|P^j - P^{j+1}\|_\infty &\leq \Gamma \left(\frac{\alpha^j}{2} \max_i \{\rho_i^{j-1}\} \right) \leq \Gamma^2 \left(\frac{\alpha^j}{2} \max_i \{\rho_i^{j-2}\} \right) \\ &\leq \dots \leq \Gamma^j \left(\frac{\alpha^j}{2} \max_i \{\rho_i^0\} \right) \end{aligned}$$

Remarquons que $\Gamma < 1$ et que (11) impliquent $\alpha^j \leq 2$, donc en passant à la limite, on obtient,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P^j(t) - P^{j+1}(t)\|_\infty = 0$$

La dernière expression signifie que la séquence $\{P^j(t)\}$ est une suite de Cauchy en la norme sup et par conséquent, c'est *convergent*. Donc, la fonction limite $c(t)$ est *continue*. \square

Remarque 1 Notez que (11) est une condition suffisante, mais ce n'est pas une condition nécessaire. En particulier, si l'hypothèse détiert seulement après une certaine étape j_0 , le schéma reste convergent vers une courbe continue, comme on peut constater en appliquant la même démonstration au polygone P^{j_0} .

3. Propriétés de la courbe limite

3.1. La distance de la courbe de la subdivision au polygone

Dans cette section, une borne pour la distance de Hausdorff entre la courbe limite et le polygone initial P^0 est obtenue.

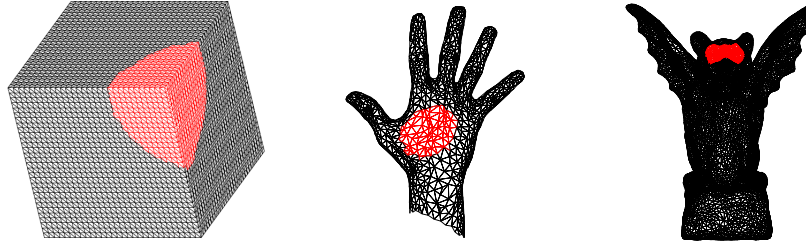


Figure 4: Des ellipses géodésiques

Lemme 1 Les sommets P_k^j , obtenus après de la j -ième subdivision de l'arête $P_i^0 P_{i+1}^0$, appartient à l'ensemble

$$\{Q \in S / d_g(Q, P_i^0) + d_g(Q, P_{i+1}^0) \leq (\alpha^0 \alpha^1 \dots \alpha^{j-1}) \rho_i^0\} \quad (15)$$

i.e. , les sommets P_k^j sont à l'intérieur de la *ellipse géodésique* avec des foyers P_i^0, P_{i+1}^0 et de l'excentricité $(\alpha^0 \alpha^1 \dots \alpha^{j-1})^{-1}$.

Démonstration Nous avons $P_i^0 = P_{2^j i}^j$ et $P_{i+1}^0 = P_{2^j(i+1)}^j$. Les sommets obtenus après de la j -ième subdivision de l'arête $P_i^0 P_{i+1}^0$ sont P_k^j , pour $k = 2^j i, \dots, 2^j(i+1)$ et on a :

$$\begin{aligned} d_g(P_i^0, P_k^j) + d_g(P_k^j, P_{i+1}^0) &= \\ d_g(P_{2^j i}^j, P_k^j) + d_g(P_k^j, P_{2^j(i+1)}^j) &\leq \\ \sum_{l=2^j i}^{k-1} \rho_l^j + \sum_{l=k}^{2^j(i+1)-1} \rho_l^j &= \\ \sum_{l=2^j i}^{2^j(i+1)-1} \rho_l^j &= \\ \alpha^{j-1} \sum_{l=2^{j-1} i}^{2^{j-1}(i+1)-1} \rho_l^{j-1} &= \\ \dots & \\ = \alpha^{j-1} \alpha^{j-2} \dots \alpha^0 \rho_i^0 & \end{aligned}$$

Par conséquent, la somme des distances géodésiques de P_k^j à $P_i^0, l = i, i+1$ est inférieur ou égal à $\alpha^{j-1} \alpha^{j-2} \dots \alpha^0$ fois la distance géodésique, ρ_i^0 , de P_i^0 à P_{i+1}^0 . \square

En utilisant le Lemme 1, nous obtenons une borne supérieure de la distance de Hausdorff d_H entre le segment de la courbe limite $\{c(t), t \in [t_i^j, t_{i+1}^j]\}$ et l'arête $P_i^0 P_{i+1}^0$.

Théorème 2 Soit $c(t)$ la courbe limite du schéma de subdivision (5). Supposons que $\alpha = \prod_{j=0}^{\infty} \alpha^j$ est finie. Alors,

$$d_H(\{c(t), t \in [t_i^0, t_{i+1}^0]\}, P_i^0 P_{i+1}^0) \leq \frac{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\| \sqrt{\omega^2 - 1}}{2} \quad (16)$$

$$\text{avec } \omega := \frac{\alpha \rho_i^0}{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\|}.$$

Démonstration Selon Lemme 1, nous savons que tous les points obtenus à le j -ième subdivision de l'arête $P_i^0 P_{i+1}^0$ sont contenus dans l'intérieur de la *ellipse géodésique* avec des foyers P_i^0, P_{i+1}^0 et de l'excentricité $(\alpha^0 \alpha^1 \dots \alpha^{j-1})^{-1}$, donnée par

$$\{Q \in S / d_g(Q, P_i^0) + d_g(Q, P_{i+1}^0) = (\alpha^0 \alpha^1 \dots \alpha^{j-1}) \rho_i^0\}$$

Soit Q un point sur le segment de courbe $c([t_i^0, t_{i+1}^0])$, et notons par Π_Q le plan engendré par Q, P_i^0 et P_{i+1}^0 . Comme la distance euclidienne est plus petit que la distance géodésique, alors Q est à l'intérieur de l'ellipse *euclidienne* avec des foyers P_i^0, P_{i+1}^0 et d'excentricité $1/\omega$, définie par

$$E_Q := \{R \in \Pi_Q / \|R - P_i^0\| + \|R - P_{i+1}^0\| = \omega \|P_{i+1}^0 - P_i^0\|\}$$

$$\text{avec } \omega := \frac{\alpha \rho_i^0}{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\|}.$$

Observez que la longueur de l'axe demi-petit de l'ellipse *euclidienne* E_Q est $\frac{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\| \sqrt{\omega^2 - 1}}{2}$, tandis que la distance euclidienne de chaque foyer de E_Q à le point le plus proche d'intersection entre le demi-grand axe de E_Q et l'ellipse *euclidienne* E_Q est $\frac{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\| (\omega - 1)}{2}$.

Puisque $\omega \geq 1$, la première distance est plus grande que la seconde distance. Par conséquent, la distance de Hausdorff de l'arête $P_i^0 P_{i+1}^0$ à la section de la courbe limite $c([t_i^0, t_{i+1}^0])$ est majoré par $\frac{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\| \sqrt{\omega^2 - 1}}{2}$. \square

3.2. Paramétrisation

Nous prouvons dans cette section des propriétés du schéma de subdivision, lorsque t^0 est la paramétrisation défini en (9).

Théorème 3 Prenons le schéma de subdivision (5)-(7) avec la paramétrisation (9)-(10) et supposons que les conditions (6) et (11) détiennent.

Notons par $l^j(P_0^j, P^j(t))$ la longueur, entre les points P_0^j et $P^j(t)$, de la courbe de subdivision de l'étape j . Alors, pour

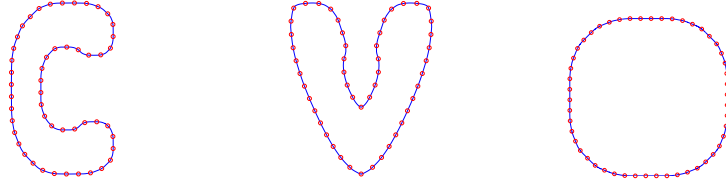


Figure 5: Séquences des points approximativement sur des courbes de subdivision avec une distribution de la longueur l'arc environ uniforme

tout $\varepsilon > 0$ il existe j_0 , tel que

$$|l^{j_0+k}(P_0^{j_0+k}, P^{j_0+k}(t)) - \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} t| < \varepsilon$$

détiennent, pour tous les $k > 0$, où $R(k) := \prod_{j \geq k} \alpha^j$.

Démonstration Supposons que $t_i^{j_0} < t < t_{i+1}^{j_0}$. Alors, il n'est pas difficile de montrer que, en utilisant du récurrence (7), on obtient

$$l^{j_0+k}(P_0^{j_0+k}, P^{j_0+k}(t_i^{j_0})) = \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} t_i^{j_0}$$

Par conséquent, légalité

$$|l^{j_0+k}(P_0^{j_0+k}, P^{j_0+k}(t)) - \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} t| =$$

$$|l^{j_0+k}(P^{j_0+k}(t_i^{j_0}), P^{j_0+k}(t)) - \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} (t - t_i^{j_0})| \quad (17)$$

détiennent pour $t_i^{j_0} < t \leq t_{i+1}^{j_0}$.

Soit $s_i^{j_0+k}$ la somme des distances géodésiques entre deux sommets consécutifs du souspolygone P^{j_0+k} qui est obtenu après k étapes de subdivision de l'arête $P_i^{j_0} P_{i+1}^{j_0}$ de P^{j_0} . Évidemment, on détiennent

$$l^{j_0+k}(P^{j_0+k}(t_i^{j_0}), P^{j_0+k}(t)) \leq s_i^{j_0+k} \quad (18)$$

D'autre part, si nous prenons P^{j_0} comme polygone initial et t^{j_0} comme paramétrisation initial, nous obtenons la même courbe limite comme lorsque l'on prend P^0 comme polygone initial et t^0 comme paramétrisation initial, donc après un argument semblable à celui utilisé dans le Lemme 1, on obtiene que $s_i^{j_0+k}$ a la borne supérieure

$$s_i^{j_0+k} \leq \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} \rho_i^{j_0} \quad (19)$$

Par conséquent, avec la substitution de (18) et (19) dans (17), on obtient les inégalités suivantes

$$|l^{j_0+k}(P_0^{j_0+k}, P^{j_0+k}(t)) - \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} t| =$$

$$|l^{j_0+k}(P^{j_0+k}(t_i^{j_0}), P^{j_0+k}(t)) - \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} (t - t_i^{j_0})| \leq$$

$$\frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} (\rho_i^{j_0} - (t - t_i^{j_0})) <$$

$$\frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} \rho_i^{j_0}$$

Rappelons que (6) implique que $\lim_{k \rightarrow \infty} R(j_0+k) = 1$. D'autre part, si nous choisissons j_0 assez grand, de telle sorte que les inégalités

$$\frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} < 2 \text{ et } \max_i \{\rho_i^{j_0}\} < \varepsilon/2$$

détiennent, on obtient le résultat désiré. \square

Remarque 2 Le résultat ci-dessus signifie que, pour les indices suffisamment grands j , le spline linéaire $P^j(t)$ que interpole des points (t_i^j, P_i^j) est environ paramétré par un multiple de la longueur d'arc. En plus, soit $c(t)$ la courbe limite et supposons que les conditions (6) et (11) détiennent. Si nous notons la longueur d'arc de la section de $c(t)$ entre les points $c(0) = P_0^0$ et $c(t)$ par $L(0, t) := \lim_{k \rightarrow \infty} l^{j_0+k}(P_0^{j_0+k}, P^{j_0+k}(t))$, on obtient que $L(0, t) \simeq R(j_0) t$ détiennent. Par conséquent, la courbe limite $c(t)$ est environ paramétrée par un multiple de la longueur de l'arc.

4. Conclusions

Nous avons présenté un nouveau schéma de subdivision interpolatoire avec contrôle sur la longueur de l'arc de la courbe limite, adapté pour la conception de courbes sur les surfaces.

La paramétrisation n'est pas uniforme, mais il est possible de calculer (avec un montant de calcul faible) une séquence de m points approximativement sur la courbe de subdivision ayant une distribution de la longueur l'arc environ uniforme. Même lorsque ces points ne sont pas exactement sur la

courbe de subdivision, on a une borne pour leur distance à la courbe limite, que nous permettrons d'estimer leur erreur.

La formulation du schéma général est présentée pour des variétés de dimension deux. Dans le cas particulier des surfaces triangulées, les résultats obtenus dans [MCV07, MVC08] rendent possible d'obtenir des implementations efficaces, que devraient être examinées en détail dans un prochain travail.

Remerciements

J. Estrada-Sarlabous et V. Hernández-Mederos ont été soutenus par le projet PNCB 0409 du CITMA/ Cuba. Ils reconnaissent aussi le soutien de TWAS/ UNESCO/ CNPq et de Visgraf-IMP/ Brésil dans le cadre des TWAS/ UNESCO/ CNPq-Brésil Associateships Réf. 3240173676 et Réf. 3240173677, respectivement.

References

- [CKS99] CROUCH P., KUN G., SILVA F.: The de Casteljau algorithm on Lie groups and spheres. *Journal of Dynamical and Control Systems* 5, 3 (July 1999), 397–429.
- [DD89] DESLAURIERS G., DUBUC S.: Symmetric iterative interpolation processes. *Constructive Approximation* 5, 1 (1989), 49–68.
- [DFH09] DYN N., FLOATER M., HORMANN K.: Four point curve subdivision based on iterated chordal and centripetal parameterizations. *Computer Aided Geometric Design* 26 (2009), 279–286.
- [DLG87] DYN N., LEVIN D., GREGORY J. A.: A four-point interpolatory subdivision scheme for curve design. *Computer Aided Geometric Design* 4 (1987), 257–268.
- [Dub86] DUBUC S.: Interpolation through an iterative scheme. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 114 (1986), 185–204.
- [Dyn92] DYN N.: Subdivision schemes in computer-aided geometric design. In *Advances in numerical analysis* (1992), Light W., (Ed.), vol. 2, Clarendon Press, pp. 36–104.
- [HEIM09] HERNÁNDEZ V., ESTRADA J., IVRISSIMTZIS I., MORALES S.: Curve subdivision with arc-length control. *Computing* 86, 2-3 (2009), 151–169.
- [KS98] KOBBELT L., SCHRÖDER P.: A multiresolution framework for variational subdivision. *ACM Trans. on Graph.* 17, 4 (1998), 209–237.
- [MCV07] MARTÍNEZ D., CARVALHO P., VELHO L.: Geodesic Bézier curves: A tool for modeling on triangulations. In *Proceedings of SIBGRAP 2007. XX Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing* (2007), IEEE Computer Society, pp. 71–78.
- [MMP87] MITCHELL J. S. B., MOUNT D. M., PADIMITRIOU C. H.: The discrete geodesic problem. *SIAM J. COMPUT.* 16 (1987), 647–668.
- [MVC05] MARTÍNEZ D., VELHO L., CARVALHO P.: Computing geodesics on triangular meshes. *Computer and Graphics* 29, 5 (October 2005), 667–675.
- [MVC08] MARTÍNEZ D., VELHO L., CARVALHO P.: Subdivision curves on surfaces and applications. In *Proceedings of CIARP 2008* (2008), Springer LNCS 5197, pp. 405–412.
- [PH05] POTTMANN H., HOFER M.: A variational approach to spline curves on surfaces. *Computer Aided Geometric Design* 22, 7 (October 2005), 693–709.
- [PR95] PARK F. C., RAVANI B.: Bézier curves on Riemannian manifolds and Lie groups with kinematic applications. *ASME Journal of Mechanical Design* 117 (1995), 36–40.
- [PS98] POLTHIER K., SCHMIES M.: Straightest geodesics on polyhedral surfaces. In *Visualization and Mathematics*, Hege H.-C., Polthier K., (Eds.). Springer Verlag, Heidelberg, 1998, pp. 135–150.
- [RLJ05] RODRIGUEZ R. C., LEITE F. S., JACUBIAK J.: A new geometric algorithm to generate smooth interpolating curves on Riemannian manifolds. *LMS Journal of Computation and Mathematics* 8 (2005), 251–266.
- [Wal06] WALLNER J.: Smoothness analysis of subdivision schemes by proximity. *Constr. Approx.* 24, 3 (2006), 289–318.
- [WD05] WALLNER J., DYN N.: Convergence and C^1 analysis of subdivision schemes on manifolds by proximity. *Comput. Aided Geom. Design* 22, 7 (2005), 593–622.
- [WP06] WALLNER J., POTTMANN H.: Intrinsic subdivision with smooth limits for graphics and animation. *ACM Trans. Graphics* 25, 2 (2006), 356–374.