Simplificação de Surperfícies Implícitas não Compactas com Preservação de Topologia

ARUQUIA PEIXOTO[1], RICARDO FARIAS[1], LUIZ VELHO[2],

[1]Coppe Sistemas / UFRJ- Rio de Janeiro, Brasil
{aruquia, rfarias}@lcg.ufrj.br
[2]IMPA–Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Estrada Dona Castorina, 110, 22460 Rio de Janeiro, RJ, Brasil
lvelho@visgraf.impa.br

Abstract. Até o aparecimento do método Dual Contouring os únicos métodos efetivos de poligonalização hierárquicos eram os que utilizavam células de poligonalização simpliciais. O método Dual Contouring faz uma poligonalização hierárquica utilizando células não simpliciais, que neste caso são cubos. Apesar deste método ser adaptativo ele pode gerar triângulos pequenos que não tem nenhuma informação relevante. Para retirar estes triângulos devemos fazer uma simplificação, e esta simplificação deve manter a topologia da superfície. Para simplificar superfícies compactas basta coloca-las inteiramente contidas no cubo raíz e usar a Simplificação Topológica . Mas se a superfície não for compacta não existe nenhum cubo que possa conter a superfície totalmente e é criado um bordo na interseção da superfície com o cubo raiz e neste caso a Simplificação Topológica pode falhar resultando em uma superfície topologicamente diferente da original. Neste trabalho apresentamos um método de simplifição que mantém a topologia para superfìcies não compactas que foram poligonalizadas com o método Dual Contouring. O Controle Topológico proposto neste artigo preserva a topologia de superfícies não compactas ou superfícies compactas em que desejamos poligonalizar ou simplificar somente uma parte dela criando assim um bordo na interseção do cubo raiz com a superfície. Com esse Controle Topológico além de garantir a topologia para superfícies não compactas eliminamos a necessidade de simplificar toda uma superfície compacta, podemos concentrar a simplificação somente em uma determinada região da superfície.

1 Introdução

Superfícies implícitas são um importante tópico em Geometria Computacional. Elas são a pré-imagem de uma função. Vamos usar sem perda de generalidade o valor 0 e temos a superfície resultante como uma superfície de nível $f(x, y) = 0$.

Uma de suas mais importantes características é que a superfície implícita divide o espaço em duas partes, dependendo do valor da função. Neste caso as regiões são $f(x, y) < 0$ e $f(x, y) > 0$. Para detalhes veja [2], [7].

Em uma superfície implícita compacta, o espaço é dividido em uma região limitada, no interior da superfície, e uma região ilimitada no exterior.

Quando a poligonalização usa células não simpliciais as células utilizadas normalmente são cubos. Para testar se a superfície intersecta um cubo são calculados os valores desta superfície nos vértices deste cubo. Se os vértices estiverem em regiões diferentes, no caso $f(x, y) = 0$ se os vértices tiverem sinais diferentes, então a superfície passa por dentro do cubo.

Para criar uma poligonalização não adaptativa, ou uniforme, o cubo inicial é dividido uniformemente criando uma grade.

Em uma poligonalização adaptativa o cubo inicial, que no caso chamaremos de cubo raiz, é dividido em oito cubos e cada cubo resultante é testado para ser ou não subdividido. A esta divisão esta associada uma octree, portanto serão feitas refências a posição do cubo na octree como cubo raiz.

Para uma partição uniforme é utilizado um voxel, que é um cubo cujos lados tem o tamanho da partição, para percorrer a grade e fazer a poligonalização da superfície. Em cada posição do voxel na grade é feito um teste para saber se a superfície passa por esta posição do voxel. Em cada posição em que é detectada a interseção entre o cubo e a superfície são calculados os pontos para serem gerados os triângulos para a poligonalização da superfície.

O método Dual Contouring é um método adaptativo para poligonalização de superfície que não se baseia no uso do voxel e sim das Arestas Mínimas. Estas Arestas Mínimas são obtidas na interseção de três ou quatro cubos folha e a poligonalização é feita visitando os cubos folha que se intersectam em uma Aresta Mínima.

Nosso trabalho usa o Dual Contouring para gerar a poligonalização e após esta etapa iniciamos o processo de simplificação.

Apesar de não estar explicito no trabalho [4] as superfícies a serem simplificadas são compactas e inteiramente contidas no cubo raiz. A Simplificação Topológica introduzida com o Dual Contouring falha para superfícies não compactas pois não existe nenhum cubo que possa englobar toda a superfície, portanto é criado um bordo na interseção da superfície com o cubo raiz.

Neste trabalho extendemos o algoritmo apresentado em [4] para fazer uma simplificação que mantem a topologia de superfícies não compactas , que chamamos de Controle Topológico Não-Compacto.

Uma simplificação que funciona nestes casos é muito util não somente para superfícies não compactas , mas também para superfícies compactas em que só é necessário poligonalizar ou simplificar uma parte da superfície, o que iria gerar bordos criados pela interseção da superfície com o cubo raíz.

Para entender uma possivel aplicação nós lembramos que a situação anterior ocorre com frequência quando trabalhamos com superfícies implícitas, mesmo para aquelas que são compactas. Uma estratégia comum para resolver este problema é aumentar o cubo raíz. Mas outra solução é possível : somente poligonalizar e simplificar uma pequena porção da superfície, com um método de simplificação seguro.

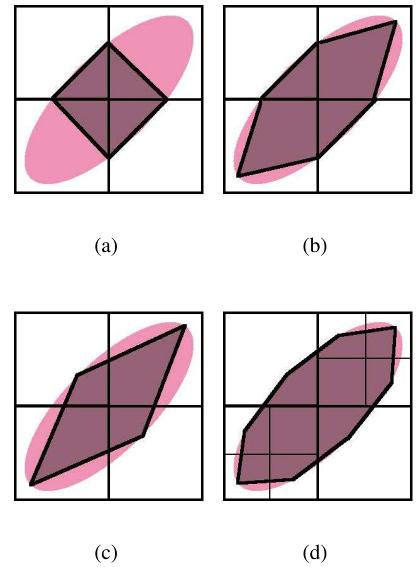


Figure 1: (a) Marching Cubes - Todos os vértices estão no bordo dos voxels. (b) Marching Cubes Extendido - Usa vértices no interior dos voxels. (c) SurfaceNets - Todos os vértices estão no interior dos voxels. (d) Dual Contouring - Todos os vértices estão no interior dos voxels e a subdivisão é adaptativa.

2 Trabalhos relacionados

Existem varios trabalhos que tratam de poligonalização de superfícies implícitas. Nesta seção serão tratados somente alguns trabalhos relacionados a este que mostram como a ideia inicial de poligonalização, com uma partição uniforme e amostras nos bordos de cada voxel, evolue para o método Dual Contouring.

2.1 Marching Cubes

Um dos métodos mais antigos e populares de poligonalização é o Marching Cubes que aparece no paper [6]. Uma das pricipais razões de sua popularidade é sua facilidade de entendimento e implementação.

Este método utiliza uma partição uniforme e para cada voxel nesta partição é criada a porção da superfície que passa por este voxel. Os vértices estão posicionados nas arestas dos voxels.

Uma representação deste método é mostrada na figura 1 (a) .

Uma observação interessante é que existem variações do método Marching Cubes que usam partições não regular, mas precisam de no mínimo uma octree restrita.

2.2 Marching Cubes Extendido

No trabalho [5] uma técnica de poligonalização para partição uniforme é mostrada usando voxels que podem conter pontos no seu interior, ao invés de pontos que estão somente nas arestas do voxel, como no método Marching Cubes.

Para cada voxel é calculado uma poligonalização usando o método Marching Cubes e se os vetores normais desta poligonalização divergirem acima de um valor definido então é gerado um ponto no interior deste voxel que é utilizado para fazer a poligonalização.

Uma representação deste método é mostrado na figura 1 (b) .

2.3 SurfaceNets

No trabalho [3] é introduzido o método SurfaceNets cuja poligonalização é puramente dual, ou seja em que os pontos estão no interior da partição, mas usa uma partição uniforme.

Inicialmente os pontos são colocados no interior de cada voxel que intersecta a superfície e uma função é usada várias vezes até colocar o ponto na sua posição final, quanto mais esta função é usada mais suave é o resultado final.

Depois de estabelecer a posição final dos pontos a poligonalização é feita usando os seis voxels vizinhos a cada voxel. O resultado pode ser visto em 1 (c).

2.4 Dual Contouring

O método Dual Contouring mostrado em [4] é um método dual e adaptativo.

Os pontos usados para a poligonalização estão no interior dos cubos, logo este método não tem problemas com cubos vizinhos que estão em níveis diferentes.

Este método inicia com um cubo que engloba a porção da superfície a ser poligonalizada. Este cubo é dividido recursivamente de acordo com o comportamento da superfície no cubo.

Uma octree está associada a esta divisão, portanto são feitas referencias a cubo raiz ou cubo folha de acordo com a posição do cubo na octree.

Na figura 1 (d) é mostrada uma representação do Dual Contouring.

3 Dual Contouring e Simplificação Topológica

No trabalho [4] além do método Dual Contouring mostrado na subseção 2.4 é introduzida a Simplificação Topológica, ela é usada para fazer simplificação de superfícies compactas poligonalizadas com Dual Contouring mantendo a topologia da superfície.

3.1 Funcionamento do Método Dual Contouring

O método Dual Contouring usa uma octree, portanto a primeira coisa a fazer é criar a octree. Para cada folha da octree é testado se o cubo correspondente tem vertices com sinais diferentes, caso tenha então a superfície intersecta o cubo. Se houver interseção então é gerado um ponto no interior do cubo de acordo com o valor da função implícita e é calculado o vetor normal relativo a este ponto.

Depois de gerar a octree ela é percorrida recursivamente para determinar as Arestas Mínimas. Elas são chamadas de Arestas Mínimas pois são a interseção de de três ou quatro cubos-folha e o comprimento desta aresta é o comprimento do lado do menor cubo. Isto quer dizer que esta aresta não tem subdivisões.

Na figura 3 (a) nós temos seis Arestas Mínimas no interior do cubo, e cada uma delas é o resultado da interseção de quatro cubos folha.

Para cada Aresta Mínima é testado o valor da função implícita nos seus extremos. Se houver mudança de sinal, então a superfície intersecta esta aresta, os cubos que se intersectam nesta aresta são visitados e é gerada um triângulo ou um quadrado da poligonalização.

Após todas as Aresta Mínimas serem visitadas então está pronta a poligonalização da superfície.

3.2 Simplificação Topológica

A Simplificação Topológica resulta em uma superfície sem mudança de topologia para superfícies compactas e totalmente contidas no cubo-raiz.

Para fazer esta simplificação para cada cubo é calculado o ângulo de abertura, que é a diferença entre os ângulos normais dos cubos que são filhos deste cubo. Se o cubo for um cubo-folha, então o ângulo de abertura é zero.

A octree é percorrida recursivamente até achar cubos cujos filhos são cubos-folha. Este cubo tem oito divisões, que são seus oito filhos, com vinte e sete vértices. Com relação ao cubo-pai, destes vértices um está no centro, seis estão no centro das faces e doze no centro de cada aresta como mostrado na figura 2.

Se o ângulo de abertura é menor do que um ângulo fixado, então são aplicados os quatro testes da Simplificação Topológica:

- A configuração dos cubos-filhos que intersectam a superfície indica que não há mais de uma componente conexa.
- O vértice no centro do cubo tem o mesmo sinal de algum dos vértices do cubo.
- O vértice no centro de cada face tem o mesmo sinal de algum dos vértices desta face.
- O vértice no centro de cada aresta tem o mesmo sinal de algum dos vértices desta aresta.

Estes testes previnem mudanças na topologia da superfície pois o primeiro teste verifica se existe mais de uma componente conexa e os outros garantem que se houver uma mudança de sinal ela é mantida.

Alguns exemplos de superfícies que não podem ser simplificadas estão na figura 2 .

4 Controle Topológico Não-Compacto

Nesta seção mostramos a nossa proposta de um método de simplificação para superfícies não compactas que preserva a topologia.

Iniciamos mostrando porque a Simplificação Topológica falha em superfícies não compactas e depois mostramos como funciona o método de Controle Topológico Não-Compacto para superfícies não compactas.

4.1 Simplificação Topológica em Superfícies Não Compactas

No caso de superfícies compactas totalmente contidas no cubo raiz, os vértices do cubo raiz tem o mesmo sinal indicando que estão fora da superfície. Com isto a Simplificação Topológica pára antes do resultado degenerar em um único cubo, pois os pontos do interior da superfície tem sinal diferente dos vértices do cubo raiz.

Mas em superfícies não compactas alguns vértices do cubo raiz podem estar em um lado da superfície e outros no outro lado. Neste caso ao aplicar a Simplificação Topológica o vértice no interior do cubo pode ter o mesmo sinal de algum dos vértices do cubo raiz e simplificação pode ser feita mesmo se o resultado for o cubo raiz com um ponto no

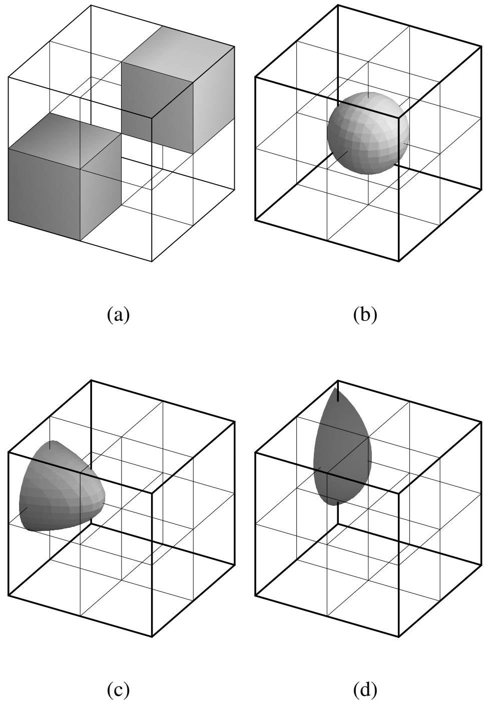


Figure 2: (a) Estes dois cubos representam uma superfície com dois componentes disconexos. (b) O vértice no centro do cubo tem sinal diferente dos vértices do cubo resultante. (c) Um vértice no centro de uma face tem sinal diferente dos vértices da face. (d) Um vértice no meio de uma aresta tem sinal diferente dos vértices da aresta.

seu interior. Ou seja com a superfície degenerando em um único ponto.

Um exemplo simples em que é mostrado como este teste falha está na figura 3 (a) . A superfície é um plano contido no cubo e o bordo é criado pela interseção do cubo-raiz com o plano.

Neste caso quatro vértices do cubo raiz estão de um lado do plano e os quatro retantes estão do outro lado. A Simplificação Topológica falha pois só há uma componente conexa e os vértices internos sempre tem o mesmo sinal de algum dos vértices do cubo-pai correspondente. O resultado desta simplificação com ângulo de abertura 360 graus é um ponto no interior do cubo-raiz, como mostrado na figura 3 (b) .

4.2 Funcionamento do Controle Topológico Não-Compacto

Como foi mostrado na sub-seção 4.1, a Simplificação Topológica pode falhar para superfícies não-compactas.

Isto acontece porque a superfície não cria pontos dentro e fora, como uma superfície compacta e ao fazer a simplificação

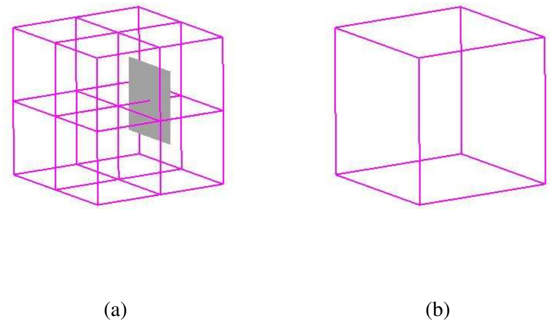


Figure 3: (a) Poligonalização original com recursão igual a 2. (b) Simplificação Toplógica com 100 graus.

usando a Simplificação Topológica os vértices dos cubos que desaparecerão podem ter o mesmo sinal dos vértices do cubo pai resultante.

Uma mudança na topologia da superfície ao usar a Simplicação Topológica pode ocorrer quando os cubos folha que intersectam a superfície tem mudança de sinal nas suas arestas internas e o cubo pai resultante desta simplificação não tem arestas internas com mudança de sinal.

Vamos mostra três casos em que a superfície degenera .

4.2.1 A superfície é degenerada em pontos que não se conectam

Vimos na subseção 4.1 o exemplo em que a Simplificação Topológica não impede que a superfície seja simplificada até restar somente um ponto, como mostrado na figura 3. Isto acontece porque a superfície atende a todas as restrições da Simplificação Topológica, mas em nenhum momento é testado se os pontos resultantes tem conexão com outros pontos da superfície.

O mesmo problema pode ser visto na figura 5 (f), neste caso a figura original 5 (a) foi simplificada com ângulo de abertura 360 graus e o resultado são oito pontos que estão em oito cubos cujas arestas internas não tem mudança de sinal, somente as arestas externas. Portanto estes pontos não se conectam.

Dos dois casos acima vemos que é necessário fazer um teste para saber se os cubos que serão simplificados contém mudança de sinal nas arestas internas e se o cubo resultante também tem mudança de sinal nas arestas internas.

Se um cubo tem mudança de sinal nas arestas internas isto indica que o ponto no seu interior está conectado a outros pontos formando uma superfície.

Logo se os cubos que desaparecerão na simplificação tiverem mudança de sinal nas arestas internas e o cubo resultante não tiver esta mudança então pode ser que o ponto no interior do cubo resultante não tenha conexão com nenhum outro ponto.

4.2.2 O número de buracos da superfície se altera

Outra modificação da topologia da superfície ocorre quando o número de buracos se altera.

Este caso pode ser visto na figura 5 (d) neste caso a superfície original tem seis buracos, mas durante a simplificação um dos pontos resultantes não tem conexão com nenhum outro ponto da superfície.

Neste caso três buracos se juntaram formando um único buraco e a superfície resultante tem quatro buracos, diferente portanto da topologia inicial da superfície.

Este caso é uma derivação do caso anterior com a diferença de que uma parte da superfície é poligonalizada e outra se perde por não ter conexão com os pontos da superfície.

4.2.3 Uma parte da superfície se degenera em um ponto

Uma outra mudança na superfície ocorre quando uma região homeomorfa a um disco resulta em um ponto, causando uma degeneração local da superfície.

Nas figuras 5 (b) e (c) temos uma simplificação usando Simplificação Topológica em que há uma degeneração na superfície pois uma região é levada em um ponto.

Isto acontece pois o cubo resultante não tem mudança de sinal nas suas arestas, mas os cubos vizinhos estão mais subdivididos e as arestas destes cubos folhas que fazem fronteira com este cubo tem mudança de sinal. Portanto a conexão com o ponto não se perde mas a porção da superfície contida neste cubo degenera em um ponto.

Este é um dos casos mais interessantes em que o Controle Topológico Não-Compacto é necessário, pois mesmo o ponto resultante não perdendo a conexão com a superfície o resultado degenera em um ponto.

Como cada cubo só contém um ponto uma região só será homeomorfa a um disco se pelo menos três cubos que são vizinhos tem pontos que se conectam. Portanto também neste caso é necessário testar se o cubo resultante tem arestas internas com mudança de sinal.

4.3 Como Funciona o Controle Topológico Não-Compacto

Pelo que vimos nas subseções anteriores temos que as falhas ocorrem pois não é testado se os cubos folha que intersectam a superfície tem arestas internas com mudança de sinal e se o cubo resultante terá uma aresta interna com mudança de sinal.

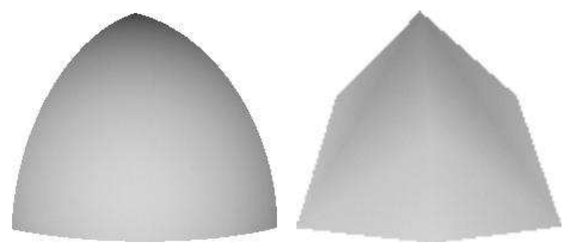
O teste do Controle Topológico Não-Compacto consiste em testar se as arestas dos cubos folha que estão nas faces do cubo resultante tem mudança de sinal. Caso uma das arestas tenha mudança de sinal basta testar se uma das arestas do cubo resultante também tem mudança de sinal.

Com este simples teste, aliado a Simplificação Topológica, podemos simplificar superfícies implícitas não compactas garantido que a topologia da superfície é mantida.

5 Resultados

Nesta seção nós mostramos alguns resultados da nossa simplificação.

Iniciamos com um octante da esfera, que é mostrado na figura 4 (a). Se usamos a Simplificação Topológica com ângulo máximo nós obtemos somente um ponto, como mostrado na figura 3 (b). Mas se usamos a nossa simplificação com o mesmo ângulo a superfície não degenera como é mostrado na figura 4 (b). Neste caso o resultado são seis pontos e o cubo raiz está dividido em oito cubos.



(a) (b)

Figure 4: (a) Um octante da esfera poligonalizada com cinco níveis de recursão. (b) O mesmo octante após a simplificação com ângulo de abertura 360 graus.

O segundo exemplo é mais completo.

Na figura 5 (a) nós temos uma superfície poligonalizada com cinco níveis de recursão. Note que esta superfície tem seis buracos e cada um está em torno dos eixos x, y, z. Como esta é uma superfície não compacta temos bordos gerados pela interseção da superfície com o cubo raiz.

Os exemplos 5 (b) e (c) mostram a superfície simplificada com um ângulo de abertura de 60 graus. Neste caso temos uma mudança na topologia da superfície pois um dos cubos resultantes contém um ponto e suas arestas internas não possuem mudança de sinal. Temos como resultado, como foi mencionado, que a superfície degenera em um ponto.

A figura 5 (d) mostra a Simplificação Topológica com ângulo de abertura 66 graus. Neste caso nós temos quatro cubos resultantes que intersectam a superfície mas não possuem mudança de sinal nas arestas internas. Um dos cubos tem um vértice que não se conecta com nenhum outro vértice e a topologia da superfície resultante muda porque três buracos são unidos formando somente um .

Na figura 5 (f) temos a Simplificação Topológica com 360 graus. Neste caso só restam oito cubos cada um deles contendo um vértice, mas como as arestas internas não apresentam mudança de sinal estes pontos não se conectam, degenerando a superfície em oito pontos.

Finalmente os exemplos 5 (e) e (g) mostram uma simplificação usando o Controle Topológico Não-Compacto. No primeiro caso usamos simplificação com 60 graus e no segundo usamos 360 graus. Em ambos os casos a topologia foi preservada.

6 Conclusão

Este é um método muito útil para simplificar superfícies não compactas poligonalizadas com o método Dual Contouring.

Vamos rever as duas razões básicas para utilizar este método.

A primeira é obviamente para superfícies não compactas, pois o resultado da simplificação é topologicamente igual a superfície original. Neste caso, estão as superfícies matemáticas não compactas como as quádricas por exemplo.

A segunda é para superfícies compactas em que se deseja poligonalizar ou simplificar somente uma parte da superfície como o octante da esfera mostrado em 4 , pois neste caso não é necessário poligonalizar toda a superfície. E ao usar um cubo raiz menor podemos aumentar a qualidade da superfície poligonalizada ou gastar menos tempo e memória para fazer a poligonalização.

Duas aplicações neste caso são Fotografia 3D e Dados Volumétricos Out-of-Core. Podemos por exemplo visualizar estatua do Davi de Michelangelo, que foi escaneada pela Universidade de Stanford, toda e não somente partes dela.

Como os dados são muito grandes e podem não caber na memória uma alternativa é dividir o volume total e poligonalizar e simplificar cada parte usando o Controle Topológico Não-Compacto , guardando os pontos resultantes da simplificação. No final é so poligonalizar todos os pontos resultantes da simplificação. Como o Controle Topológico Não-Compacto mantém a topologia da superfície temos que o resultado não será topologicamente diferente da estátua original.

7 Bibliografia

References

[1] J. Bloomenthal, and K. Ferguson, *Polygonization of non-manifold implicit surfaces* In Proceedings of SIGGRAPH 95, ACM SIGGRAPH / Addison Wesley, Los Angeles, California.

[2] edited by J. Bloomenthal, *Introduction to implicit surfaces* Morgan Kaufmann Publishers, (1997).

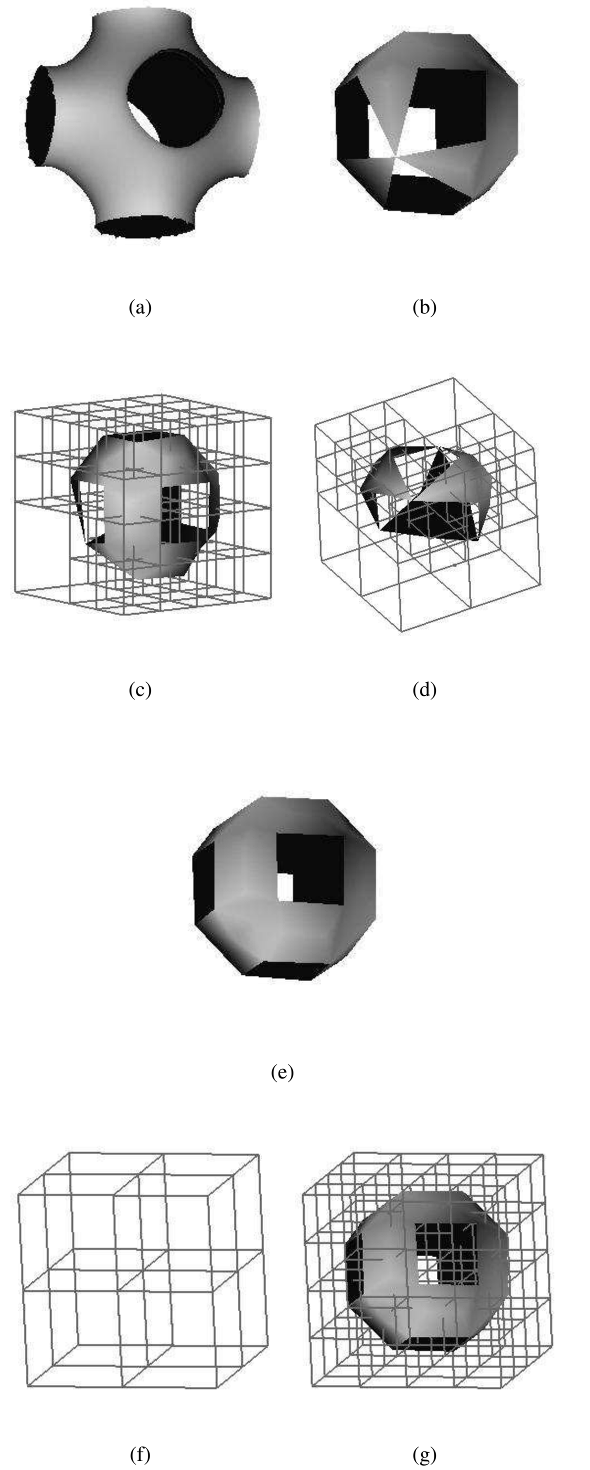


Figure 5: (a) A superfície poligonalizada com cinco níveis de recursão. (b) Simplificação com 61 graus usando somente Simplificação Topológica. (c) Simplificação com 61 graus usando somente Simplificação Topológica, mostrando as subdivisões . (d) Simplificação com 66 graus usando somente Simplificação Topológica, mostrando as subdivisões . (e) Simplificação com 61 graus usando o Controle Topológico Não-Compacto. (f) Simplificação com 360 graus usando somente Simplificação Topológica, o resultado são oito pontos desconexos. (g) Simplificação com 360 graus usando o Controle Topológico Não-Compacto, mostrando as subdivisões.

[3] S. F. Gibson, *Using distance maps for accurate surface reconstruction in sampled volumes* In 1998 Volume Visualization Symposium, IEEE, 23 30.

[4] T. Ju, F. Losasso, S. Schaefer, J. Warren *Dual Contouring of Hermite Data* In Proceedings of SIGGRAPH 2002.

[5] L. P. Kobbelt, M. Botsch, U. Schwanecke, and H.-P. Seidel, *Feature-sensitive surface extraction from volume data* In Proceedings of SIGGRAPH 2001, ACM Press / ACM SIGGRAPH.

[6] W. Lorensen, H. Cline *Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm*In Proceedings of SIGGRAPH 1987.

[7] L. Velho, J. Gomes, L. Figueiredo, *Implicit Objects in Computer Graphics* Springer-Verlag (2002).