

*Novos Desenvolvimentos
da Abordagem Sintonizada
para Representação de Sinais*

José R.A. Torreão
Instituto de Computação, UFF

Com a colaboração de
Silvia Mara Campos Victer (IC-UFF)

Introdução

IMPA, setembro 2009: Nova Representação Espaço-Frequência

- *Forma alternativa para a expansão de Fourier*

Expansão de Fourier Tradicional

➡ Representação em termos de exponenciais complexas

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} \tilde{I}(\omega)$$

- Os pesos são funções apenas da *frequência*

$$\tilde{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega x} I(x)$$

Expressão Alternativa para a Expansão de Fourier

➤ ‘Pesos’ são funções localizadas da *posição* e da *frequência*

$$I(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\omega x + \varphi_{\tilde{I}}(\omega)]} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(\omega)}} d\omega d\xi$$

onde $\varphi_{\tilde{I}}(\omega)$ é a fase da *TF*, e

$$\sigma(\omega) = |\tilde{I}(\omega)|$$

A representação pode ser reescrita como

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} * \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i[\omega x + \varphi_{\tilde{I}}(\omega)]} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(\omega)}} d\omega$$

Funções de Codificação:

$$\psi_{\omega}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i[\omega x + \varphi_{\tilde{I}}(\omega)]} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(\omega)}}$$

Também,

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} \langle \psi_{\omega}(x), e^{i\omega x} \rangle$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota um produto interno

Comparando com a expressão para uma expansão na base

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} \langle I(x), e^{i\omega x} \rangle$$

➤ *No que refere à frequência ω ,*

$$\psi_{\omega}(x) \equiv I(x)$$

Aplicações:

➤ *Transformada de Gabor Sintonizada*

$$T(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-i[\omega\xi + \varphi_{\tilde{I}}(\omega)]} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2\sigma^2(\omega)}} I(\xi)$$

➡ *Analisa as frequências mais importantes com maior resolução*

➤ *Modelagem de Neurônios Corticais*

Campos receptivos dependentes do estímulo

$$\psi_c(x, y; \omega_x, \omega_y) = e^{i[\omega_x x + \omega_y y + \varphi_{\tilde{I}}]} e^{-\left(\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_c^2}\right)}$$

$$\sigma_c(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{|\tilde{I}(\omega_x, \omega_y)|}$$

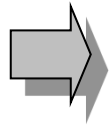
$$I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_x d\omega_y e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} * \psi_c(x, y; \omega_x, \omega_y)$$

Conclusão

?

(Em Julho de 2010...)

Transformada de Gabor Sintonizada



Segunda Forma da Transformada:

$$T^{(2)}(\omega, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{i[\Omega x - \varphi_I(x)]} e^{-\frac{\Sigma^2(x)}{2}(\Omega - \omega)^2} \tilde{I}(\Omega)$$

➤ onde $\varphi_I(x)$ é a fase do sinal, e

$$\Sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |I(x)|}$$

➤ Análise baseada nas funções

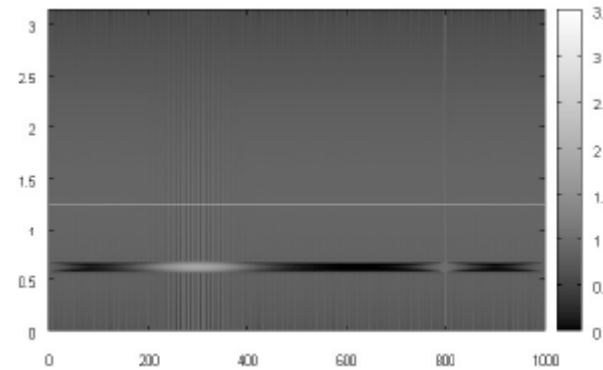
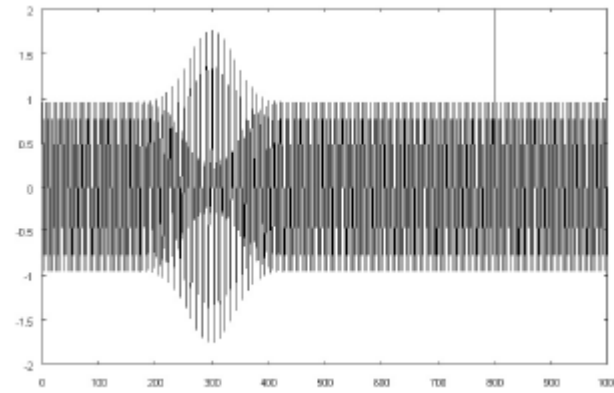
$$\psi_x(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-i[\omega x - \varphi_I(x)]} e^{-\frac{\Sigma^2(x)}{2} \omega^2}$$

tais que

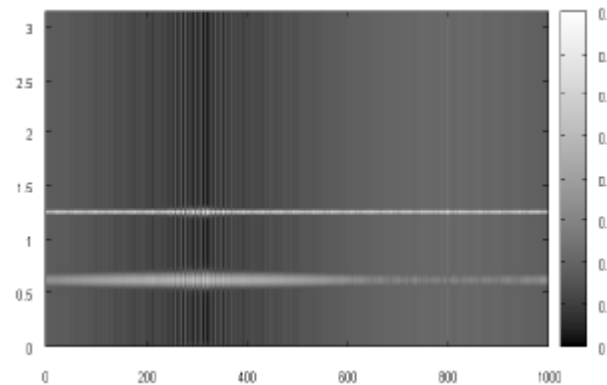
$$\tilde{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega x} * \psi_x(\omega)$$

Sinal:

$$2\delta(x - 800) + \sin\left[\frac{2\pi}{5}x\right] + e^{-\frac{\pi(x-300)^2}{10000}} \cos\left[\frac{\pi}{5}(x - 300)\right]$$



T



T(2)

- O par de transformadas T e $T^{(2)}$ apresenta propriedades semelhantes às da transformada de Wigner

Transformada de Wigner

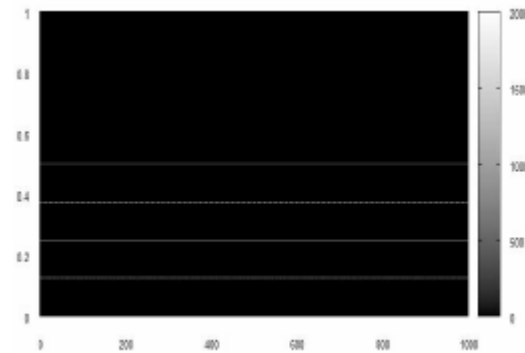
$$\begin{aligned} W(\omega, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi I^*(x - \xi/2) I(x + \xi/2) e^{-i\omega\xi} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \tilde{I}^*(\omega + \Omega/2) \tilde{I}(\omega - \Omega/2) e^{-i\Omega x} \end{aligned}$$

- O próprio sinal é usado como função analisadora
- Apresenta propriedades ótimas
- Desvantagem: é quadrática (problema dos *termos cruzados*)

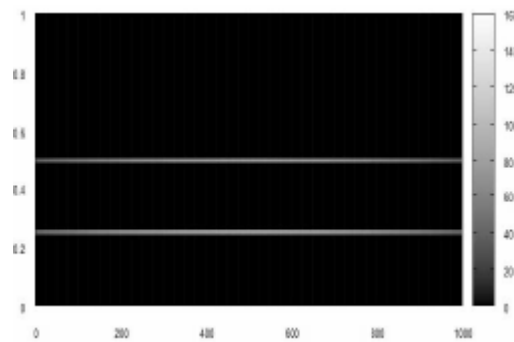
O par de transformadas sintonizadas preserva as propriedades da Wigner, mas evita os termos cruzados

Sinal:

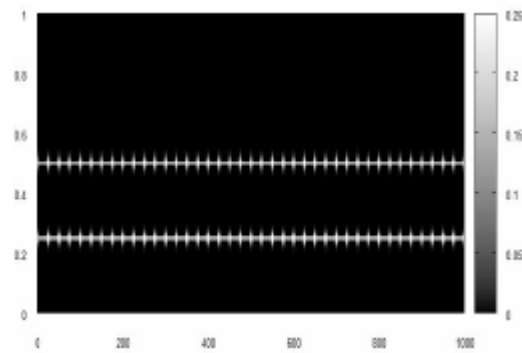
$$\cos\left(\frac{8\pi}{100}x\right) + \cos\left(\frac{16\pi}{100}x\right)$$



Wigner



T



T⁽²⁾

Propriedades das Transformadas Sintonizadas

$$\triangleright I(x) = e^{i\omega_0 x}, \quad T(\omega, x) = \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\triangleright I(x) = \delta(x - x_0), \quad T^{(2)}(\omega, x) = \delta(x - x_0)$$

$$\triangleright |\tilde{I}(\omega)|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx T(\omega, x)$$

$$\triangleright |I(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega T^{(2)}(\omega, x)$$

$$\triangleright \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^n |\tilde{I}(\omega)|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega dx \omega^n T(\omega, x)$$

$$\triangleright \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n |I(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega dx x^n T^{(2)}(\omega, x)$$

$$\triangleright I_2(x) = I(x - x_0), \quad T_{I_2}(\omega, x) = T(\omega, x - x_0)$$

$$\triangleright I_2(x) = e^{i\omega_0 x} I(x), \quad T_{I_2}(\omega, x) = T(\omega - \omega_0, x)$$

(também para $T^{(2)}$)

Ainda: Inversas

$$\tilde{I}(\omega) = 2\pi \frac{e^{i\varphi_{\tilde{I}}(\omega_0)} \mathcal{F}[T(\omega_0, x)](\omega - \omega_0)}{|\tilde{I}(\omega_0)| e^{-\frac{|\tilde{I}(\omega_0)|^2}{2} (\omega - \omega_0)^2}}$$

com

$$|\tilde{I}(\omega_0)|^2 = 2\pi \mathcal{F}[T(\omega_0, x)](\omega = 0)$$

$$I(x) = \frac{e^{i\varphi_I(x_0)} \mathcal{F}^{-1}[T^{(2)}(\omega, x_0)](x - x_0)}{|I(x_0)| e^{-4\pi^3 |I(x_0)|^2 (x - x_0)^2}}$$

com

$$|I(x_0)|^2 = \mathcal{F}^{-1}[T^{(2)}(\omega, x_0)](x = 0)$$

Generalizando a Transformada Sintonizada

⇒ *Transformada Fracionária de Fourier*

$$X_{\alpha}(u) \equiv \text{FRFT}_{\alpha}\{x(t)\} = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j \frac{\cot \alpha}{2} u^2} \int x(t) e^{j \frac{t^2}{2} \cot \alpha - j t u \csc \alpha} dt$$

➤ *Generaliza a TF*

$$X_{\frac{\pi}{2}}(u) \equiv \tilde{X}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x(t) e^{-j t u} dt$$

Também: quando $\alpha = 2k\pi$, $X_{\alpha}(u) = x(u)$

quando $\alpha = (2k + 1)\pi$, $X_{\alpha}(u) = x(-u)$

Interpretação: Rotação de um ângulo α na representação tempo-frequência

Generalizando a Representação Sintonizada:

- ⇒ *Dado um sinal, nós propomos a representação sintonizada de uma sua FRFT qualquer, em termos de funções cujas largura e fase ficam definidas por uma outra FRFT.*
- ⇒ *As representações introduzidas anteriormente, para o sinal e para a sua TF, vão surgir como casos particulares.*
- ⇒ *Do mesmo modo, as Transformadas Sintonizadas podem ser generalizadas.*

⇒ *Representação*

$$I_\beta(t) \equiv \text{FRFT}_\beta\{i(t')\}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - j \cot \alpha}} \int x_\alpha(t, u') \star y_\alpha^\beta(t, u') e^{j \frac{\cot \alpha}{2} u'^2} du'$$

⇒ *Função de Base*

$$x_\alpha(t, u) = |\csc \alpha| \sqrt{\frac{2\pi}{1 - j \cot \alpha}} e^{-j \left(\frac{t^2 + u^2}{2} \right) \cot \alpha + jtu \csc \alpha}$$

⇒ *Função de Codificação*

$$y_\alpha^\beta(t, u) = \frac{|\csc \alpha|}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-j \left(\frac{t^2 + u^2}{2} \right) \cot \alpha + jtu \csc \alpha + j\varphi(u)} e^{-\frac{(t - u \cos \alpha)^2}{2[\sigma(u) \sin \alpha]^2}}$$

Convolução Generalizada: $h(t) = (f \star g)(t) = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} e^{-j \frac{\cot \alpha}{2} t^2} (\tilde{f} * \tilde{g})(t)$

$$\tilde{f}(t) = e^{j \frac{\cot \alpha}{2} t^2} f(t)$$

➤ *Satisfaz* $H_\alpha(u) = F_\alpha(u)G_\alpha(u)e^{-j \frac{\cot \alpha}{2} u^2}$

 ***Tomando a FRFT_α dos dois lados da representação***

$$\sigma(u) = \sqrt{2\pi} |I_{\alpha+\beta}(u)|, \text{ e}$$

$$\varphi(u) = \varphi_{\alpha+\beta}(u)$$

➤ *Os parâmetros da função codificadora são dados pela FRFT de ângulo $\alpha+\beta$*

 ***Transformada Sintonizada Generalizada***

$$T_{\alpha,\beta}(u, t) = \frac{|\csc \alpha|}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{j\left(\frac{\tau^2+u^2}{2}\right) \cot \alpha - j\tau u \csc \alpha - j\varphi(u)} e^{-\frac{(\tau-t-u \cos \alpha)^2}{2[\sigma(u) \sin \alpha]^2}} I_{\beta}(\tau) d\tau$$

Casos Particulares:

➤ $\beta=0, \alpha=\pi/2$: $x_{\frac{\pi}{2}}(t, u) = \sqrt{2\pi}e^{jtu}$

$$y_{\frac{\pi}{2}}^0(t, u) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{j[tu+\varphi(u)]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(u)}}$$

$$\sigma(u) = \sqrt{2\pi}|I_{\pi/2}(u)| \equiv \sqrt{2\pi}|\tilde{I}(u)|, \text{ e } \varphi(u) = \varphi_{\tilde{I}}(u).$$

$$i(t) \equiv \text{FRFT}_0\{i(t')\}(t) = \int e^{jtu'} * \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{j[tu'+\varphi(u')]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(u')}} du'$$

➤ $\beta= \pi/2, \alpha=-\pi/2$: $x_{-\frac{\pi}{2}}(t, u) = \sqrt{2\pi}e^{-jtu}$

$$y_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(t, u) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-j[tu-\varphi(u)]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(u)}}$$

$$\sigma(u) = \sqrt{2\pi}|I_0(u)| \equiv \sqrt{2\pi}|i(u)|, \text{ e } \varphi(u) = \varphi_i(u).$$

$$\tilde{I}(t) \equiv \text{FRFT}_{\pi/2}\{i(t')\}(t) = \int e^{-jtu'} * \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-j[tu'-\varphi(u')]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(u')}} du'$$

➤ $\beta, \alpha=0$:

$$y_0^\beta(t, u) = \frac{1}{2\pi} \sigma(u) e^{j\varphi(u)} \delta(t - u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |I_\beta(u)| e^{j\varphi_\beta(u)} \delta(t - u)$$

A representação se reduz à identidade:

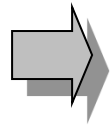
$$I_\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma(t) e^{j\varphi(t)} = |I_\beta(t)| e^{j\varphi_\beta(t)}$$

Transformada Sintonizada:

$$T_{0,\beta}(u, t) = \int I_\beta^*(\tau - t) I_\beta(\tau) \delta(\tau - t - u) d\tau = I_\beta^*(u) I_\beta(t + u)$$

⇒ *Relação com a Wigner:*

$$\mathcal{F}[T_{0,\beta}(u - t/2, t)](\omega) = W_{I_\beta}(\omega, u) = \int_{-\infty}^{\infty} dt I_\beta^*(u - t/2) I_\beta(u + t/2) e^{-j\omega t}$$



Generalizando a Generalização:

A Transformada Canônica Linear tem a Transformada Fracionária de Fourier como caso particular.

$$X_{a,b,c,d}(u) \equiv \text{LCT}_{a,b,c,d}\{x(t)\}(u) = \sqrt{-j} e^{-j\pi \frac{d}{b} u^2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\pi t^2 \frac{a}{b} - jtu \frac{2\pi}{b}} dt$$

para $b \neq 0$

$$X_{a,0,c,d}(u) \equiv \text{LCT}_{a,0,c,d}\{x(t)\}(u) = \sqrt{d} e^{-j\pi c d u^2} x(du)$$

$$ad - bc = 1$$

⇒ *FRFT*: $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$, $c = -b$, e $d = a$

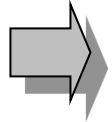
Outro caso particular: Transformada de Fresnel

$$a = d = 1 \quad c = 0 \text{ e } b = \lambda Z$$

⇒ *Descreve a propagação de ondas eletromagnéticas*

λ é o comprimento de onda, e Z a distância percorrida

Observações sobre a Transformada Sintonizada

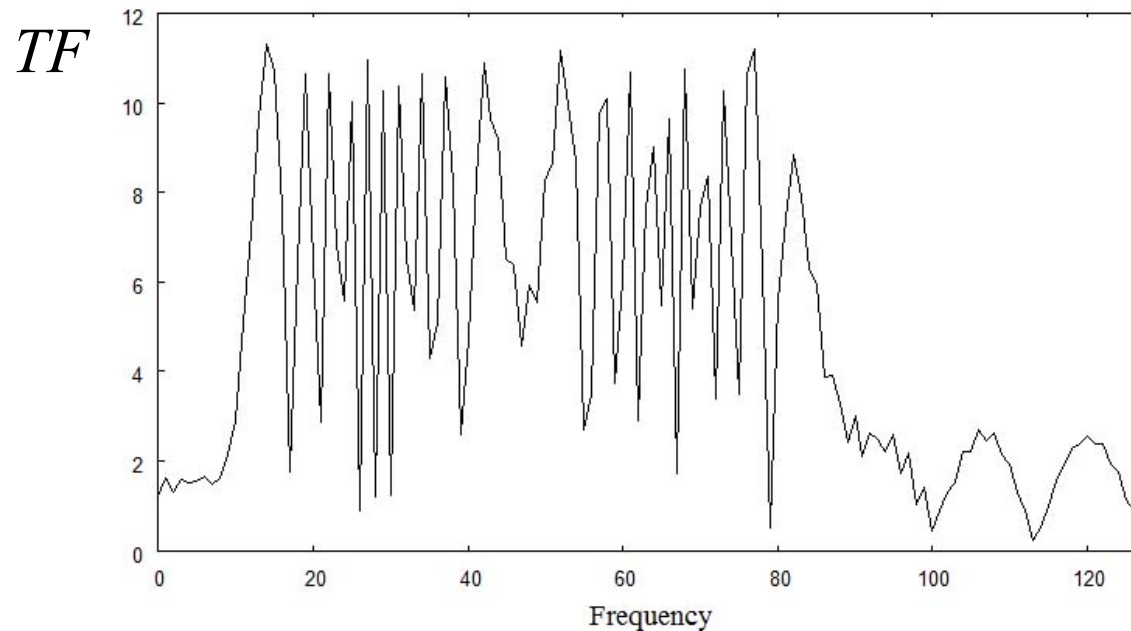


Suavização do espectro de Fourier

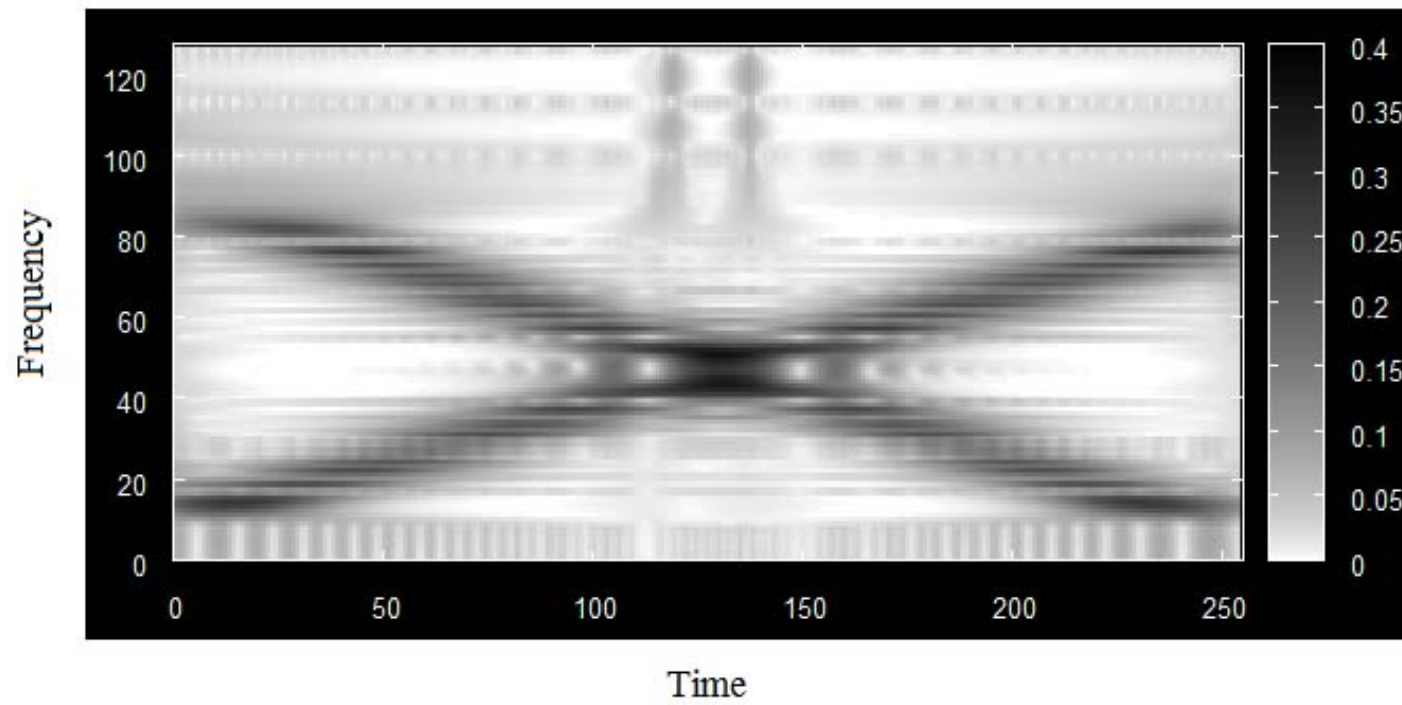
$$\text{Sinal } h[0 : 255] = \cos(2\pi(10 + t/7)t/256) + \cos(2\pi(256/2.8 - t/6)t/256)$$

$$h[114 : 122] = h[114 : 122] + \cos(2\pi 0.42t)$$

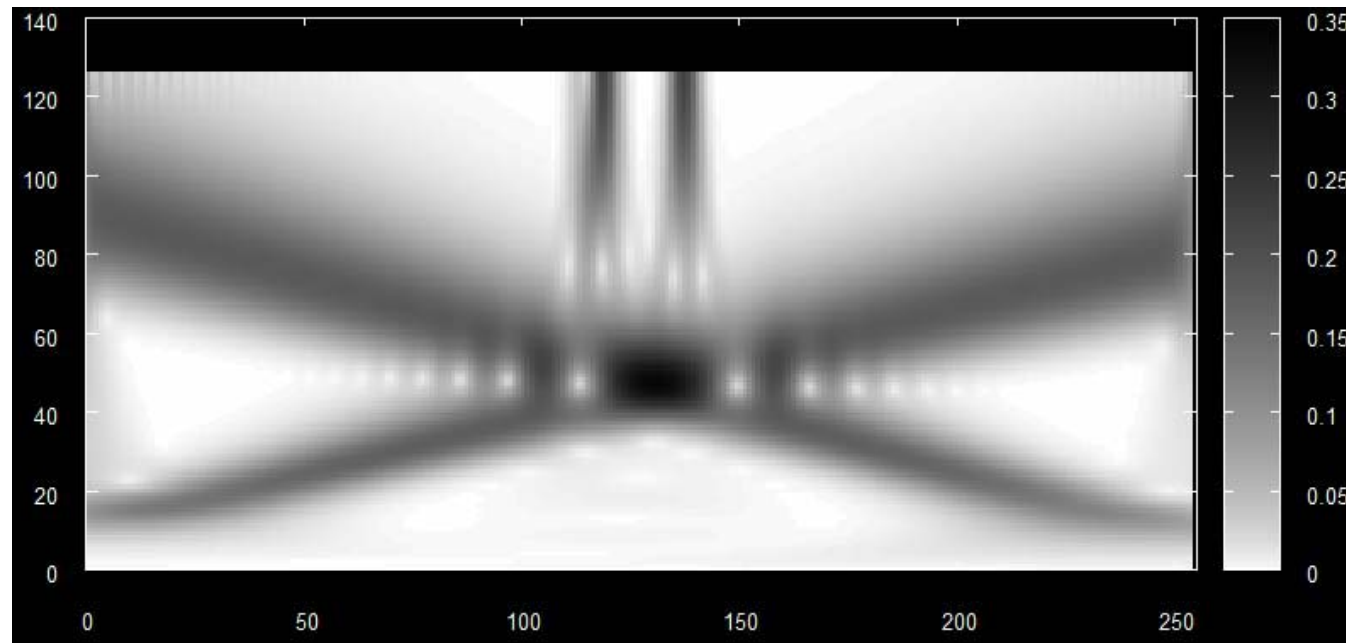
$$h[134 : 142] = h[134 : 142] + \cos(2\pi 0.42t)$$



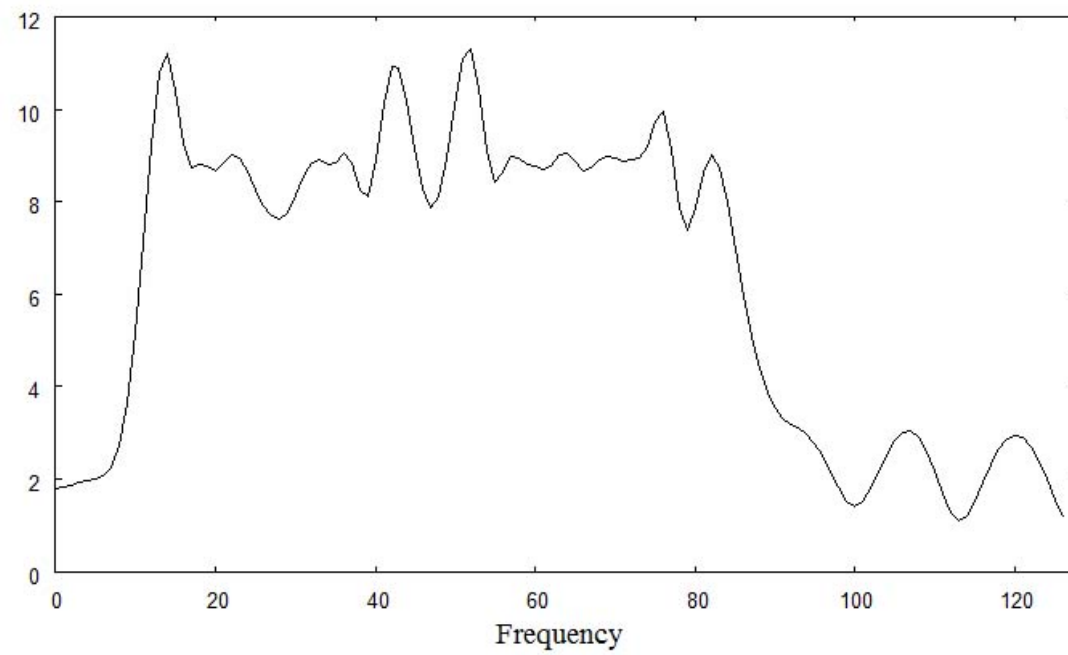
Transformada Sintonizada



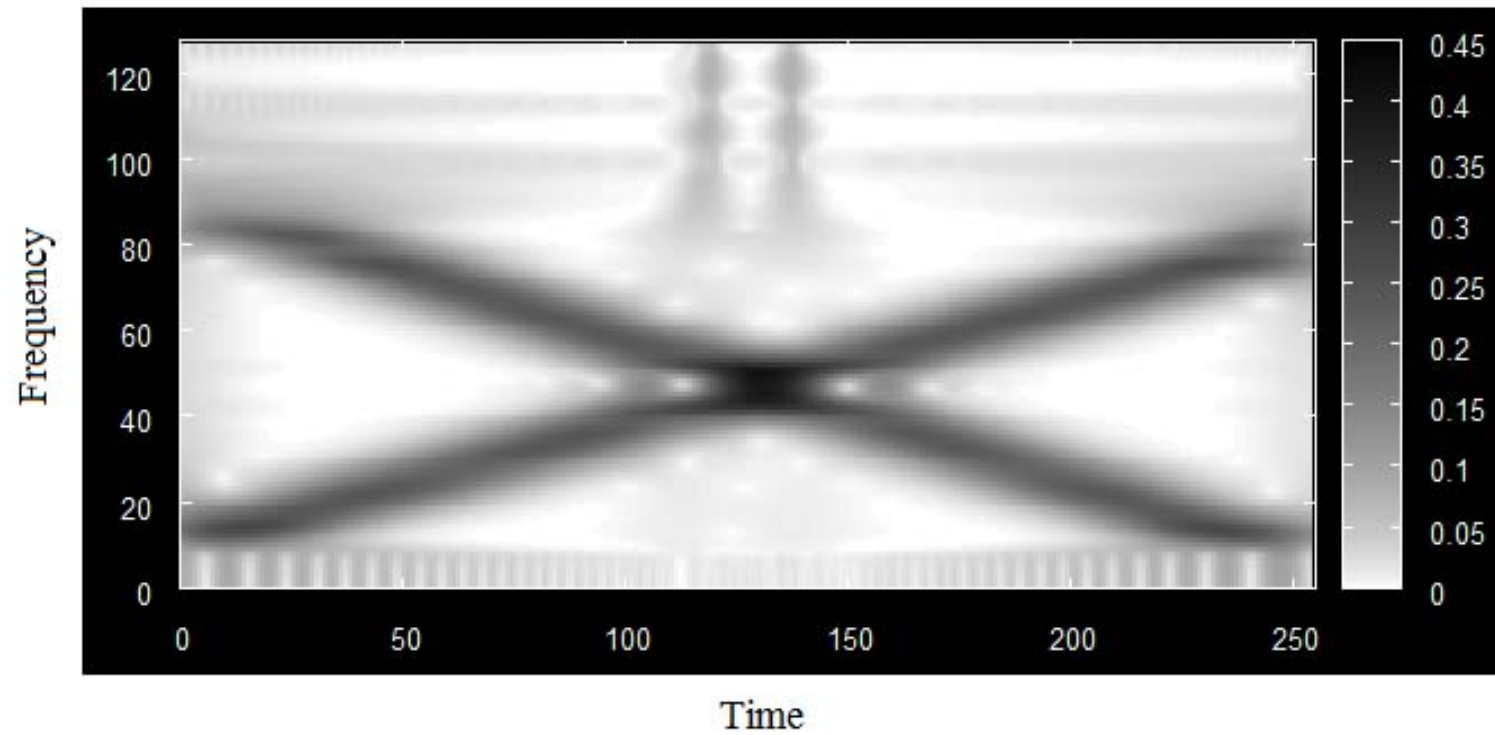
Transformada S



TF suavizada



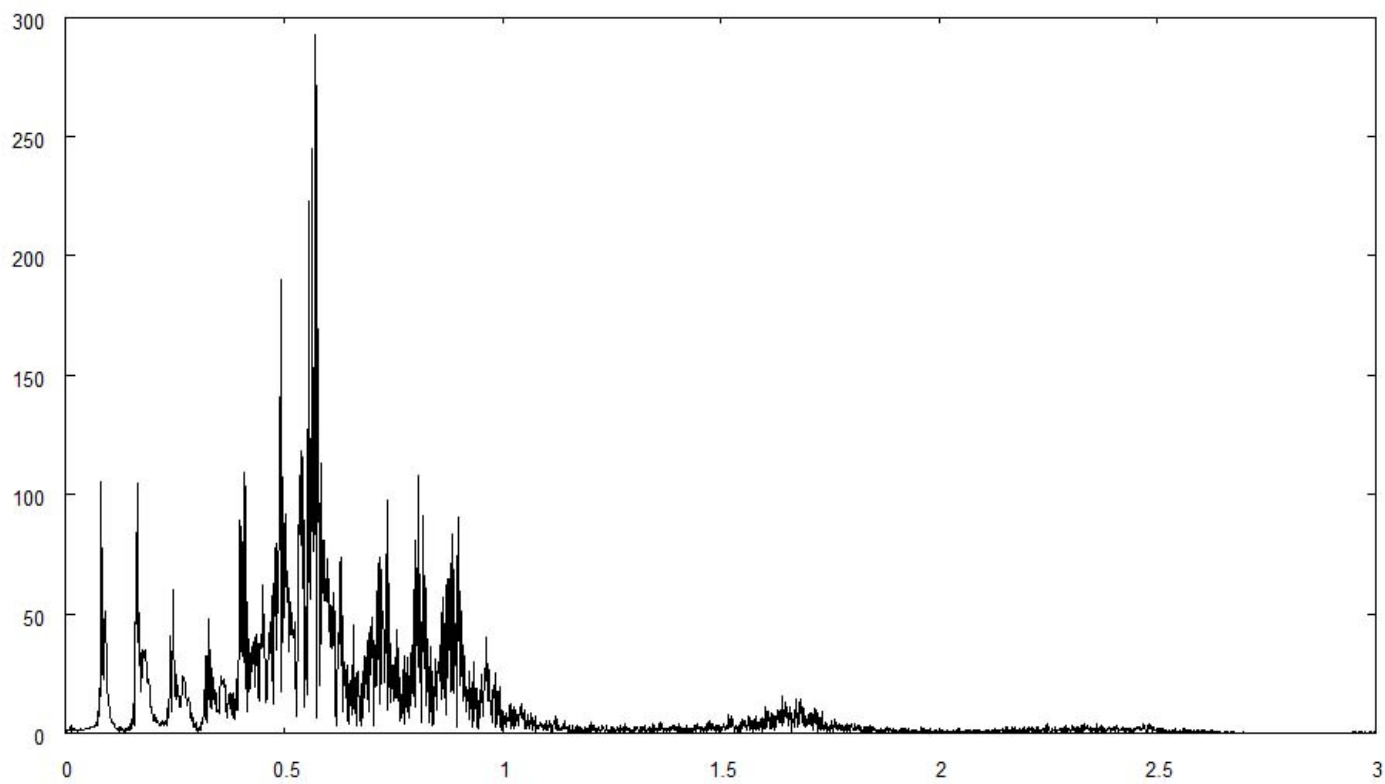
Transformada Sintonizada



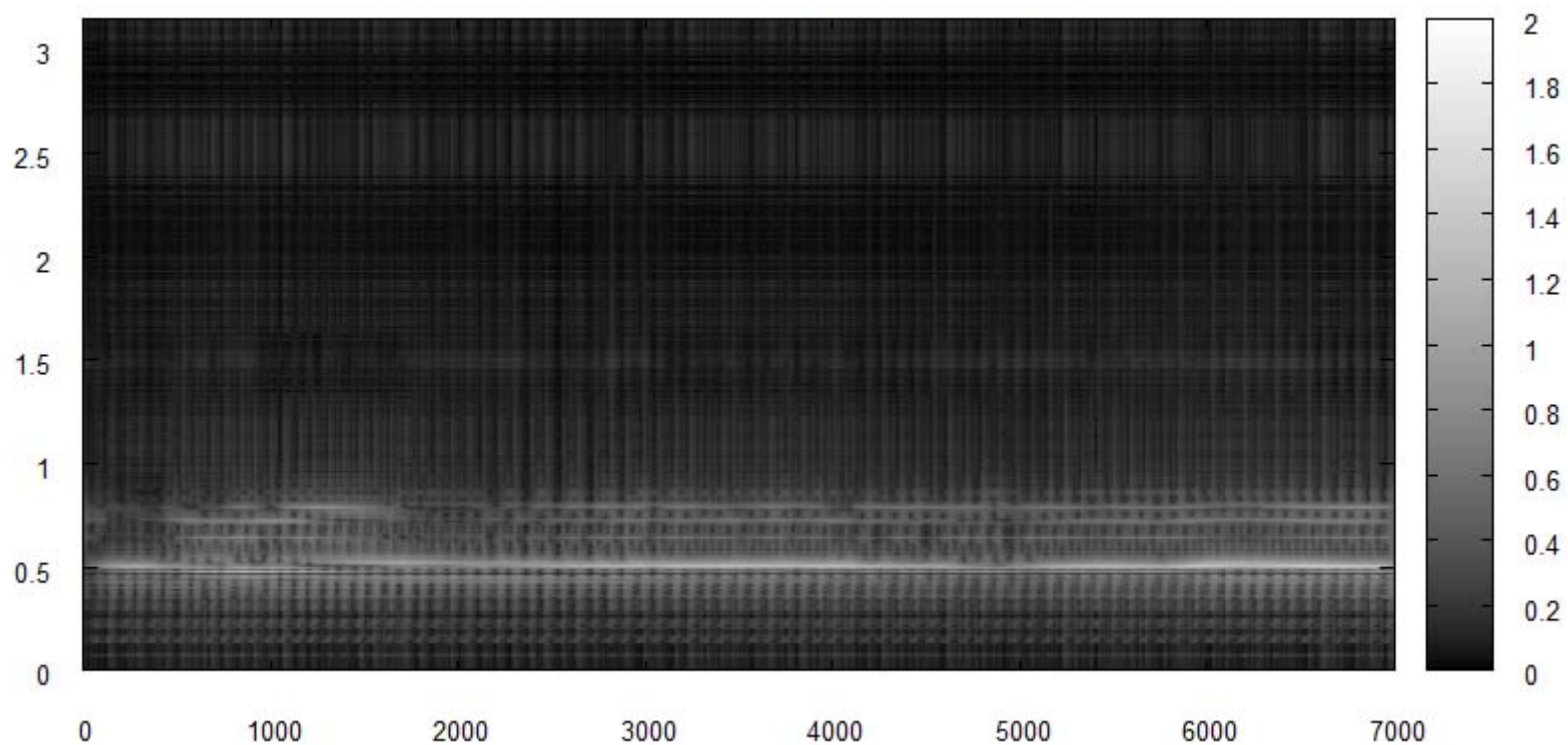
➔ *Sinais com componentes de Fourier muito díspares*

Sinal Ah

TF



➡ *Função analisadora sintonizada à derivada do sinal*



Aplicação à Modelagem Neuronal

➔ *Modelagem de Campos Receptivos Centro-Periferia*

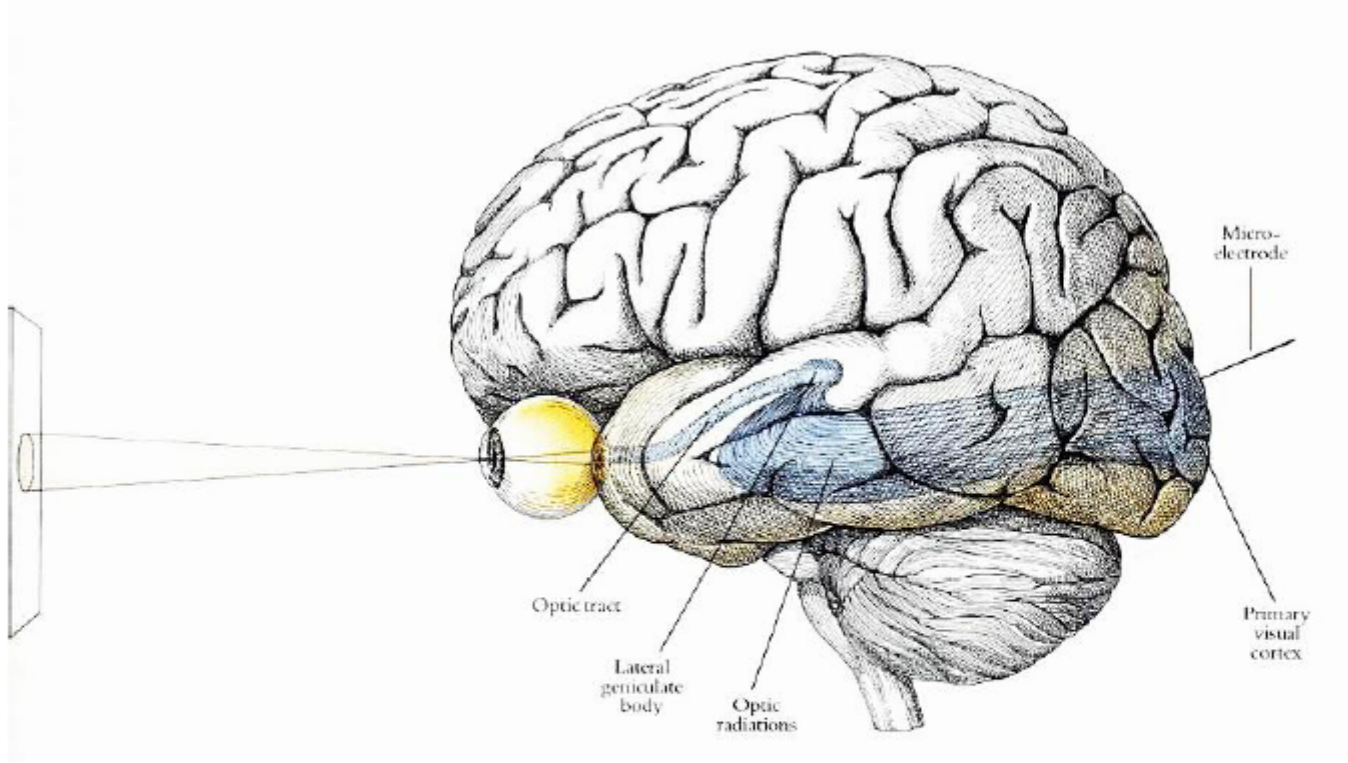
- Células da Retina e do Núcleo Geniculado Lateral
- Descorrelacionam imagens naturais

$$\text{Espectro de Fourier} \sim (\omega_x^2 + \omega_y^2)^{-1/2}$$

- Nosso modelo: Função de codificação *rotacionalmente simétrica*, para representar versões *branqueadas* das imagens de entrada

$$\text{➔ } I_{white}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_x d\omega_y e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} * \psi(r; \omega_x, \omega_y)$$

$$I_{white}(x, y) = W(x, y) * I(x, y) \quad W(x, y): \text{ Filtro branqueador}$$



➤ **Modelo do Campo Receptivo:**

Função de Codificação Rotacionalmente Simétrica:

$$\psi(r; \omega_x, \omega_y) = -\frac{e^{i\varphi_{\tilde{I}}(\omega_x, \omega_y)}}{\pi r} \{1 - \cos[\sigma(\omega_x, \omega_y)\pi r] - \sin[\sigma(\omega_x, \omega_y)\pi r]\}$$

com

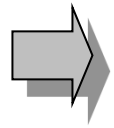
$$\sigma(\omega_x, \omega_y) = \frac{\rho}{\pi} \sqrt{1 - \left[1 + \frac{\rho \tilde{W}(\omega_x, \omega_y) |\tilde{I}(\omega_x, \omega_y)|}{4\pi}\right]^{-2}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rho = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$$

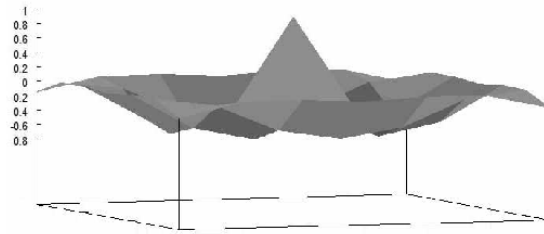
Espectro do Filtro de Branqueamento

$$\tilde{W}(\omega_x, \omega_y) = \frac{\rho}{1 + \kappa \rho^2}$$

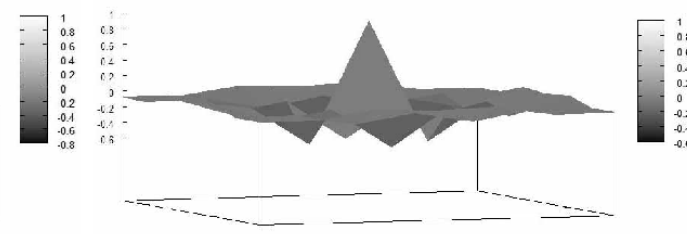
➤ *Equalização do espectro natural + Supressão de ruído*



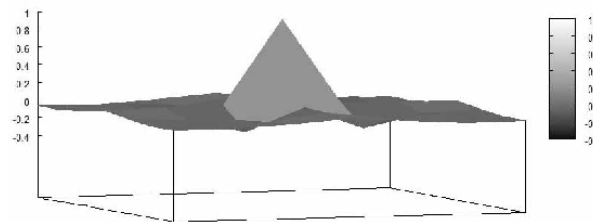
Gráficos da Magnitude das Funções Codificadoras



(a)



(b)

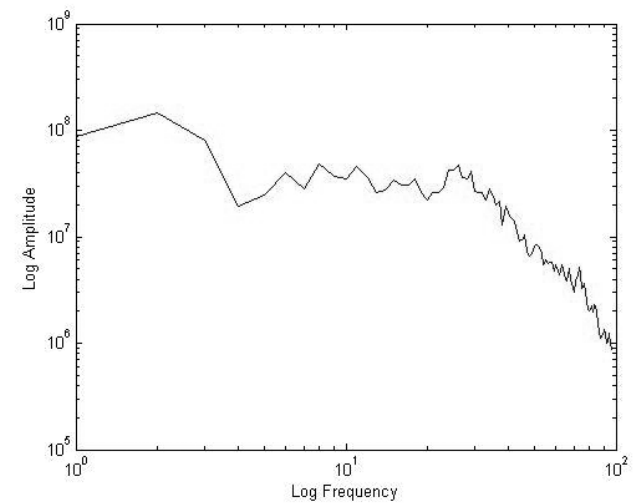
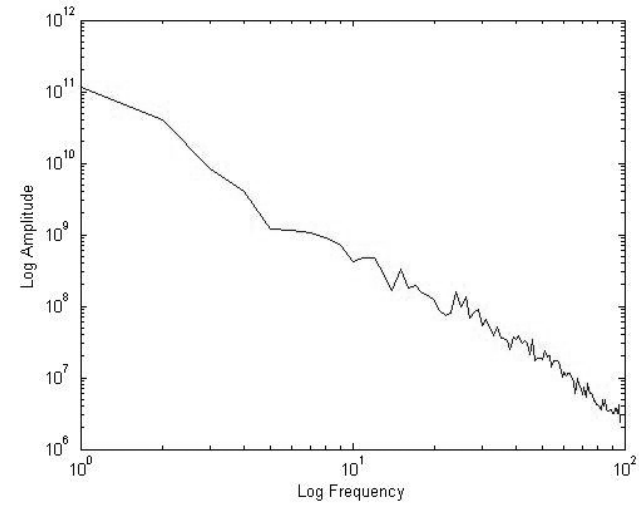
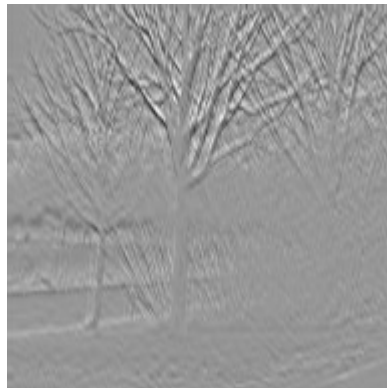


(c)

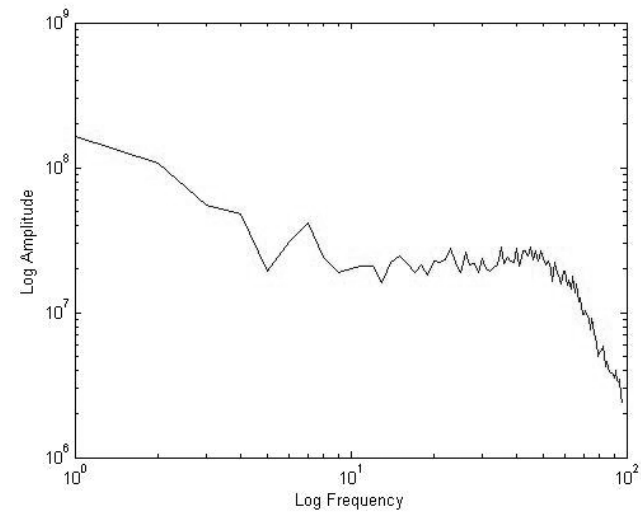
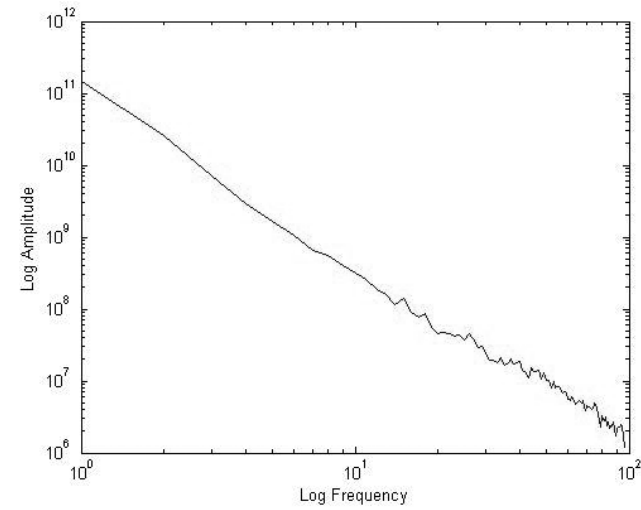
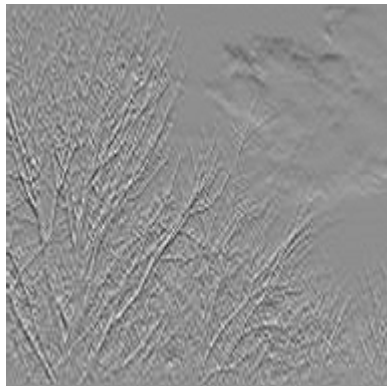
$(\omega_x, \omega_y) : (0, 1)$ (a), $(2, 0)$ (b), $(3, 1)$ (c)

Resultados

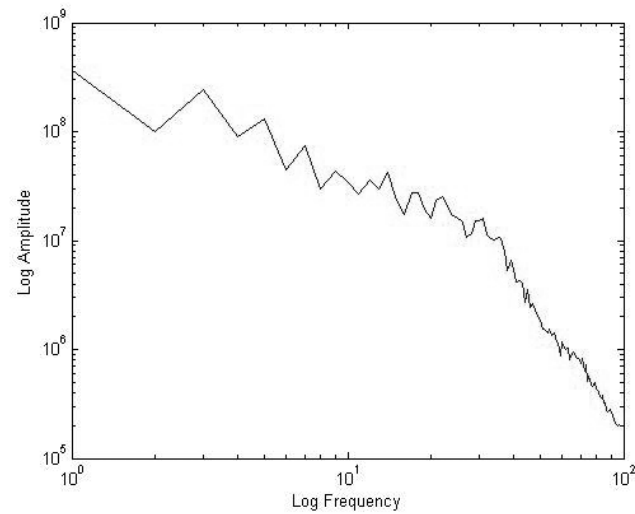
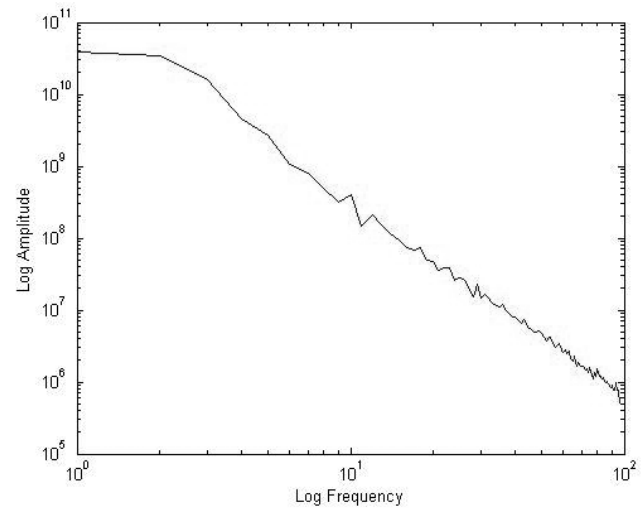
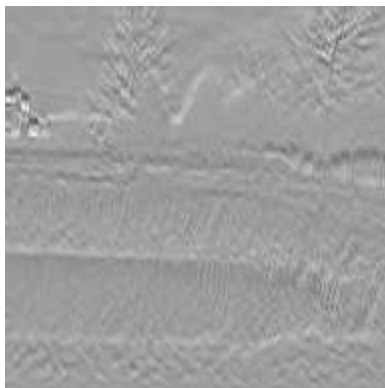
Janela 5×5 , $\kappa = 0,05$



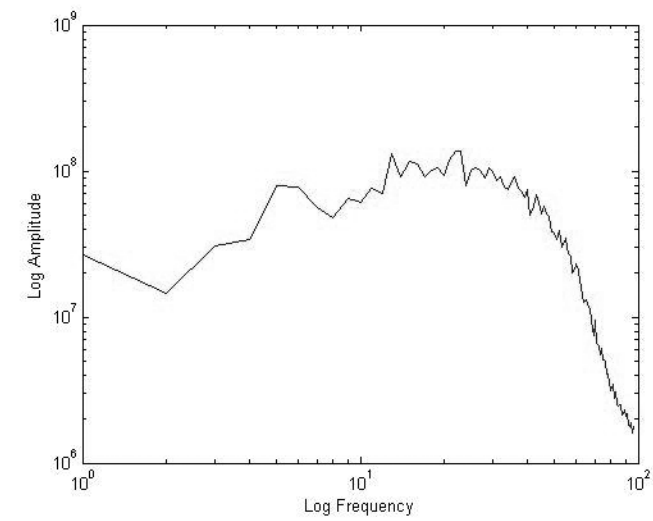
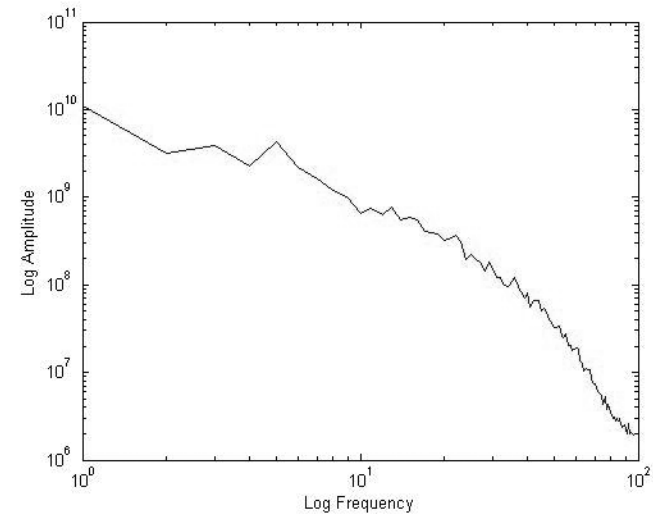
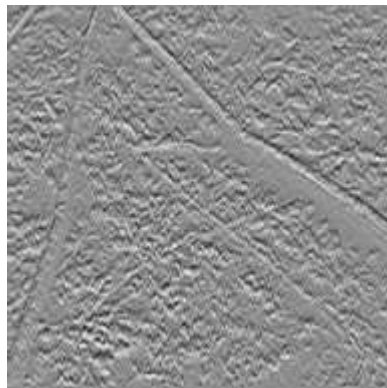
Janela 3×3 , $\kappa = 0,05$



Janela 5×5 , $\kappa = 0,05$



Janela 3×3 , $\kappa = 1$



➔ *As imagens branqueadas têm o aspecto de mapas de borda, codificando tanto intensidade quanto polaridade das bordas*

➔ *Os campos receptivos do modelo apresentam as seguintes propriedades neurofisiologicamente plausíveis:*

- *Surgem com organização Centro-On e Centro-Off*
- *Dependem da frequência e não respondem a entradas uniformes*
- *As suas periferias são mais definidas para baixas frequências*

Observações sobre a Modelagem Neuronal

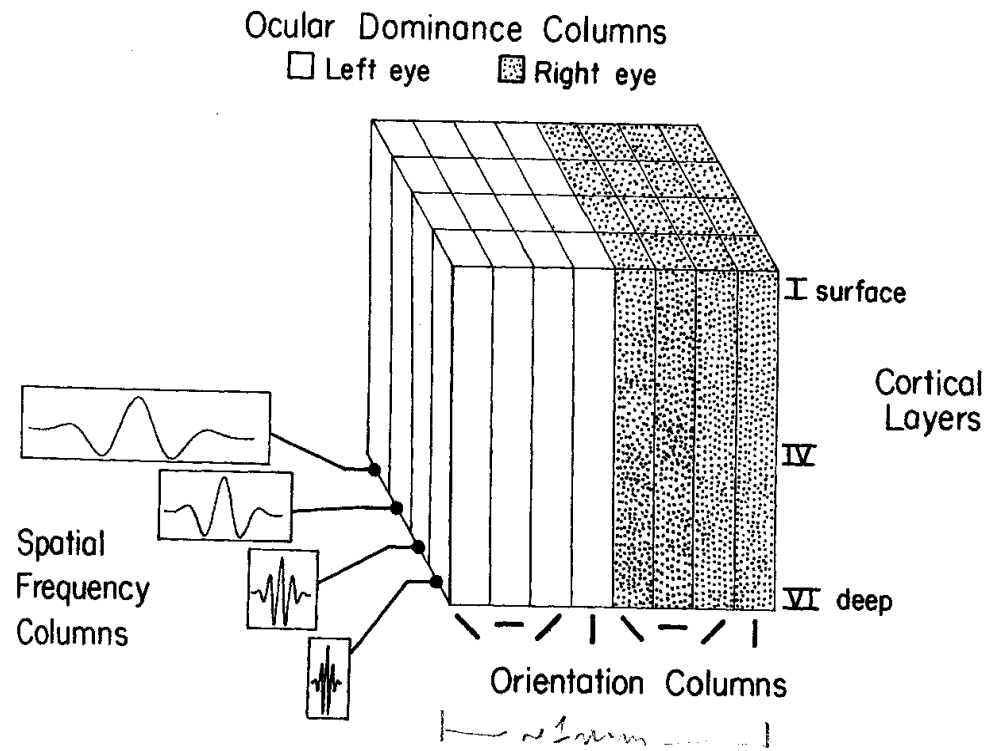
- ➔ *A representação cortical (Gabor) deve codificar as imagens branqueadas (saídas da representação CP)*
- ➔ *Haveria um papel para a segunda forma de representação de Gabor na modelagem neural?*

Segunda forma da representação de Gabor (1D)

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[\omega x - \varphi_I(x)]} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\omega - \Omega)^2}{(2\pi)^3 |I(x)|^2}} dx d\Omega$$

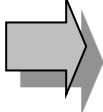
- Cálculo da *TF* por meio de funções localizadas
- A *TF* é necessária para a primeira forma de representação

➔ *Módulo Cortical*



Model of Striate Module in Cats

Agradecimentos

 *Ao IMPA, e, em particular ao Luiz Velho, pela oportunidade do sabático.*