Tesselações: Arte e Matemática

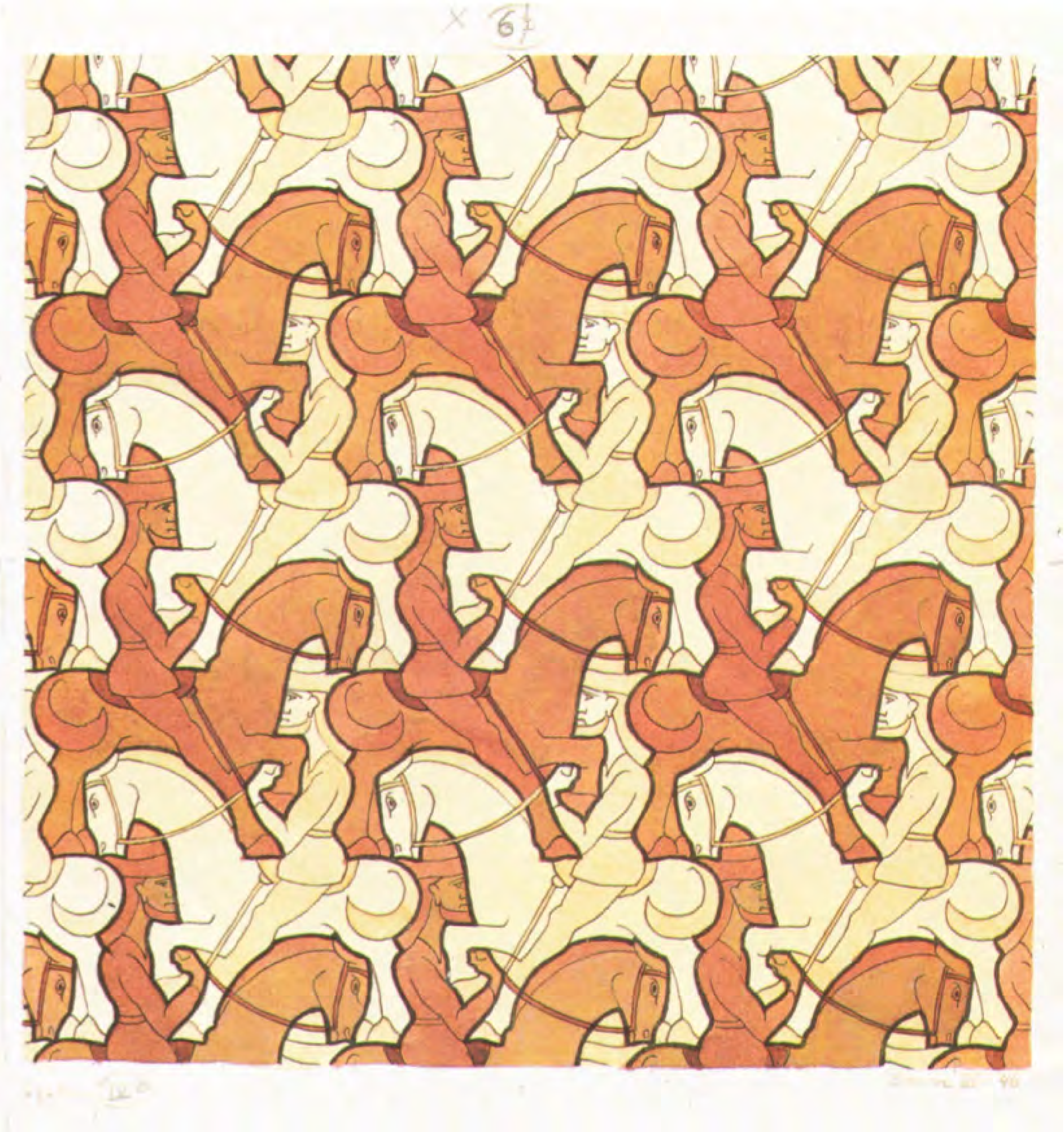
J. Ezequiel Soto S.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

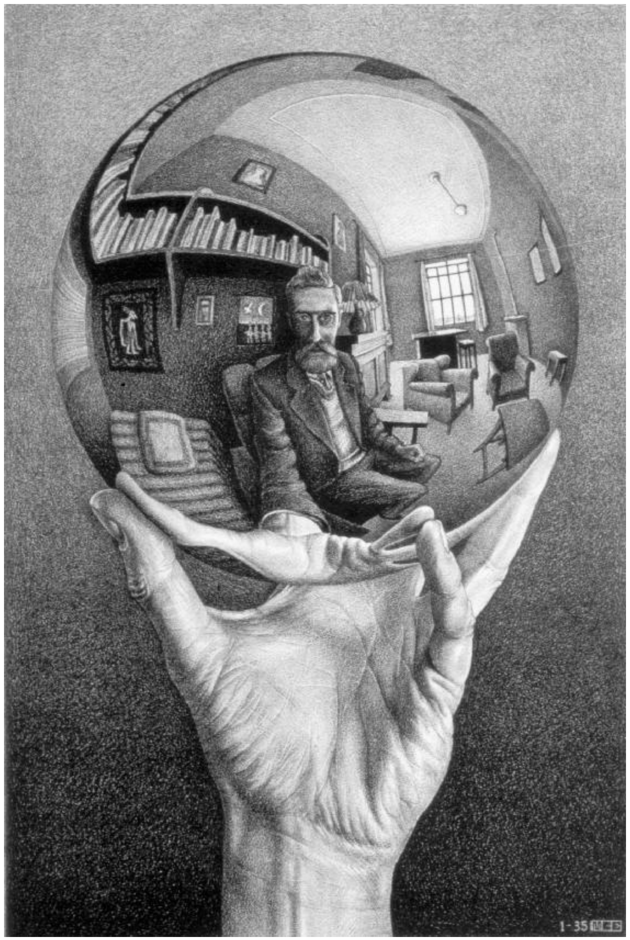
Visgraf Vision and Graphics Laboratory

29 de Janeiro, 2018

Motivação



M.C. Escher

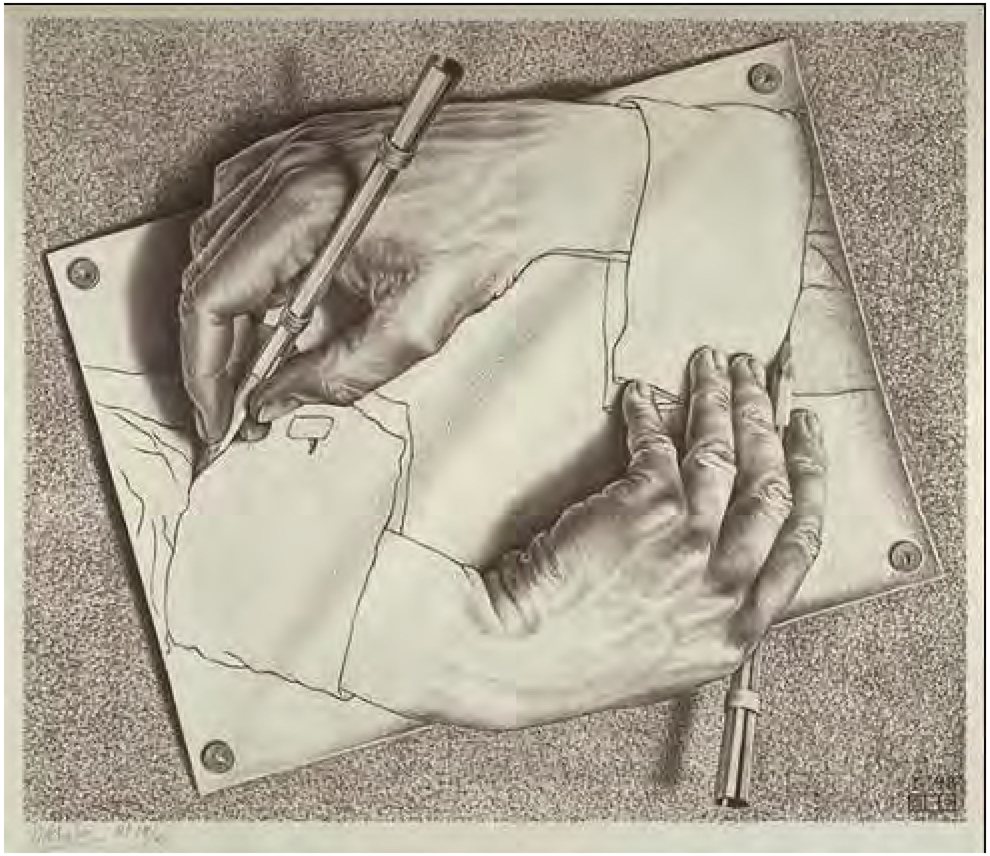


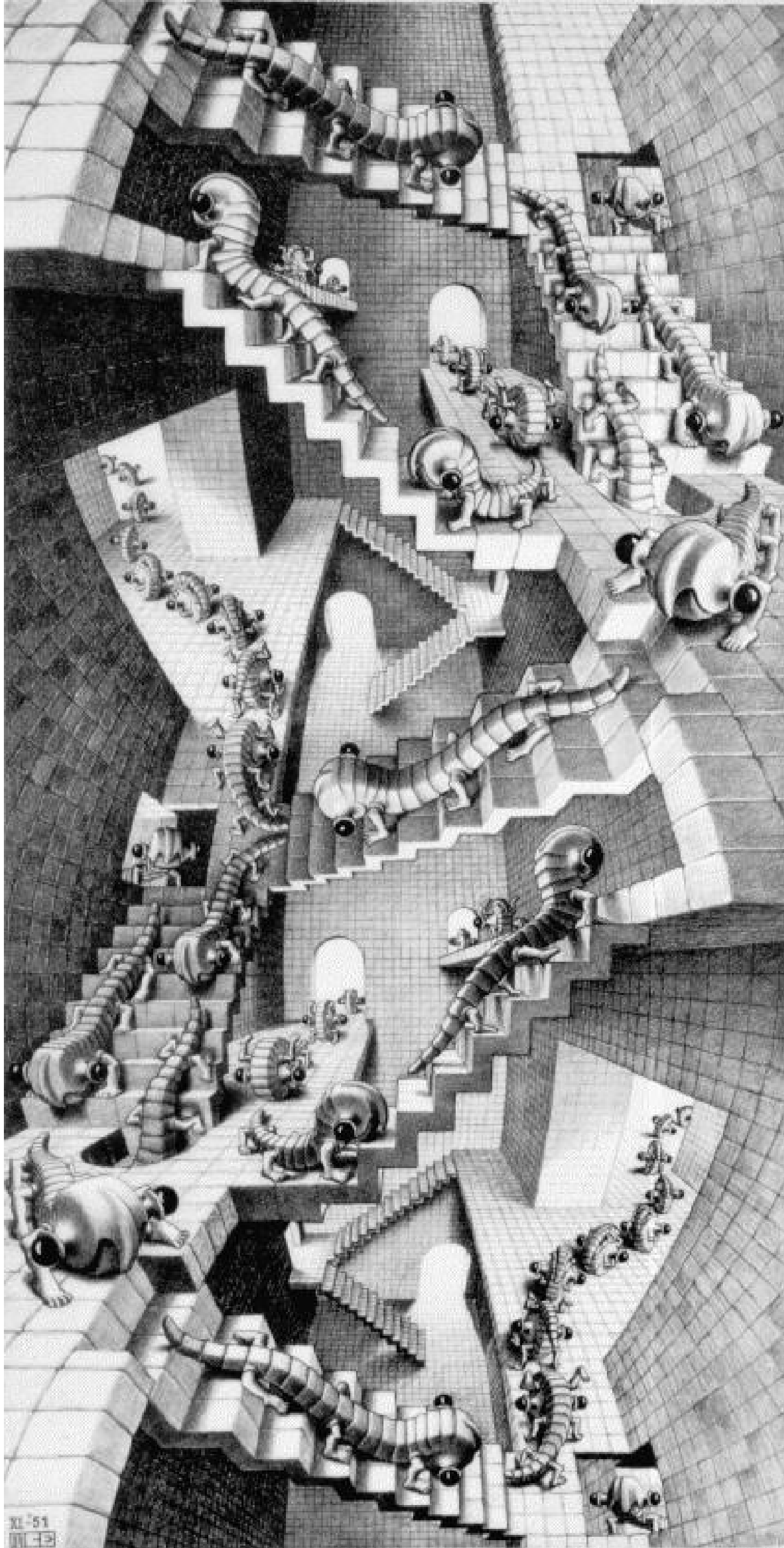
Holandés, nascido em Leeuwarden.

(1898-1972)

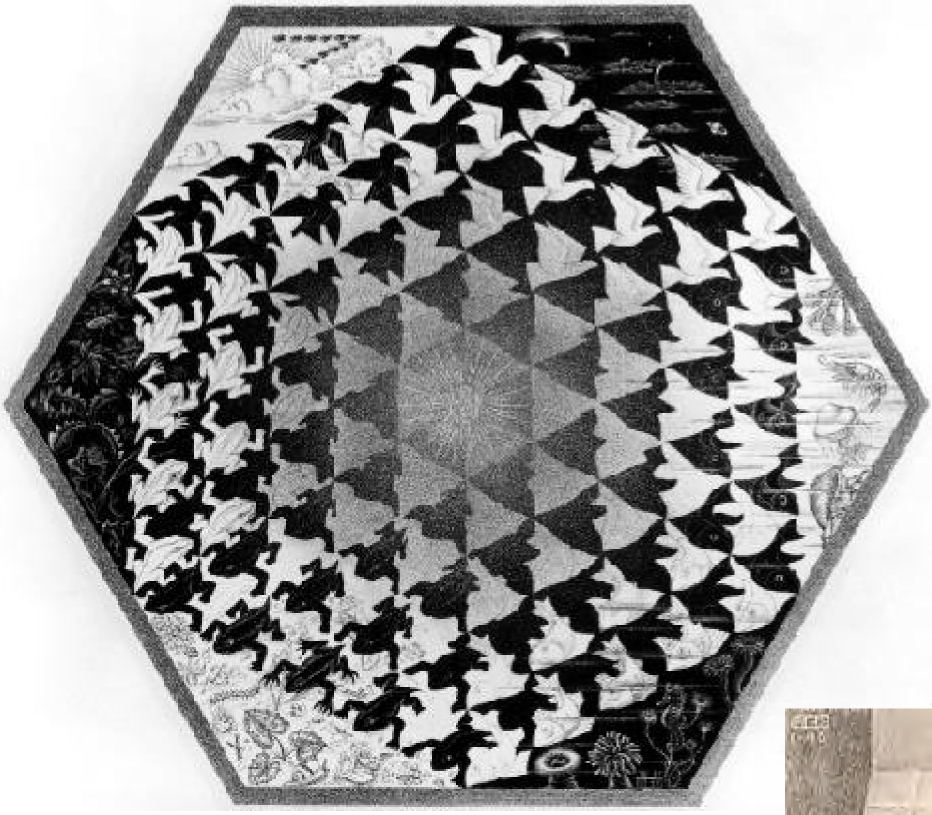
- Construções impossíveis.
- Tesselações.
- Representações do infinito.
- Metamorfoses.

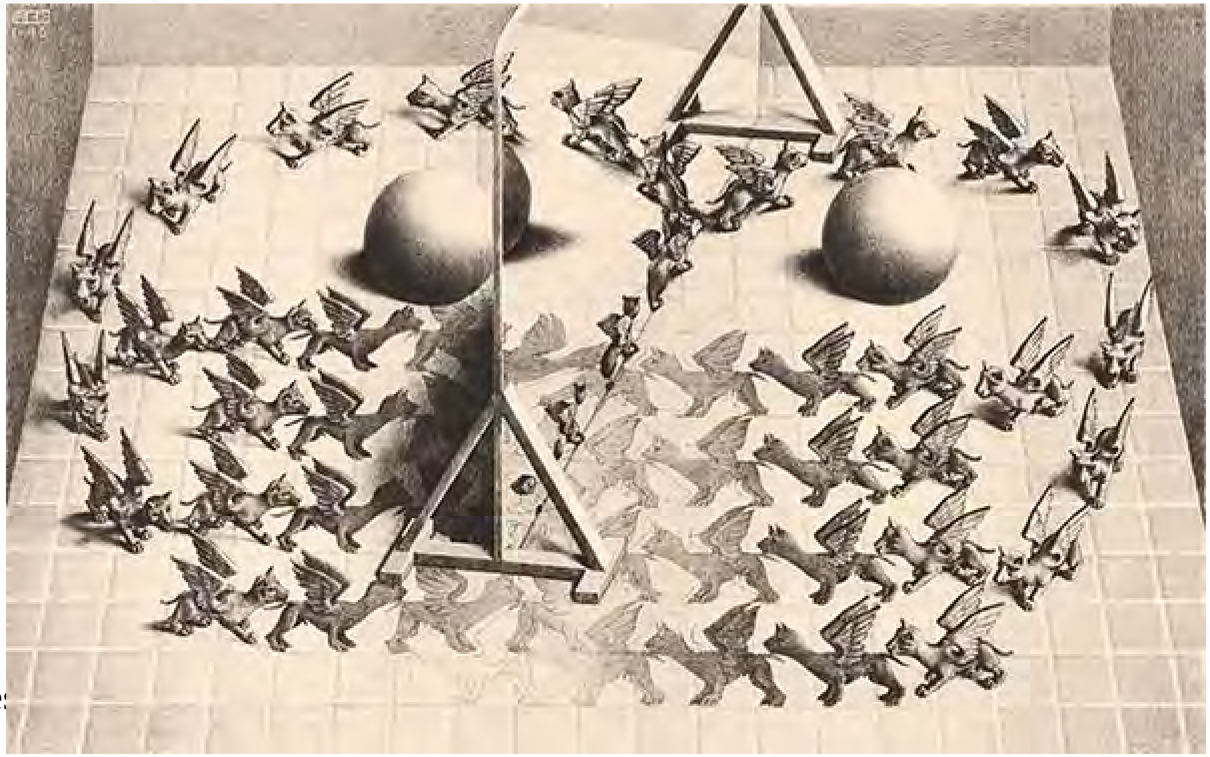
- Diálogo com a matemática
  → Coxeter





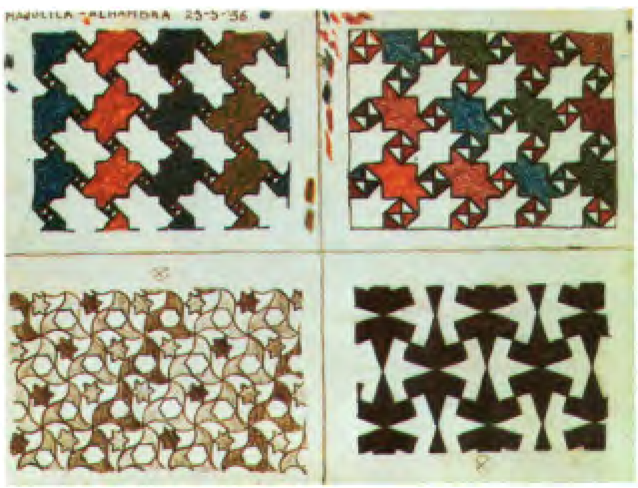
Tesselações: Arte e Matemática

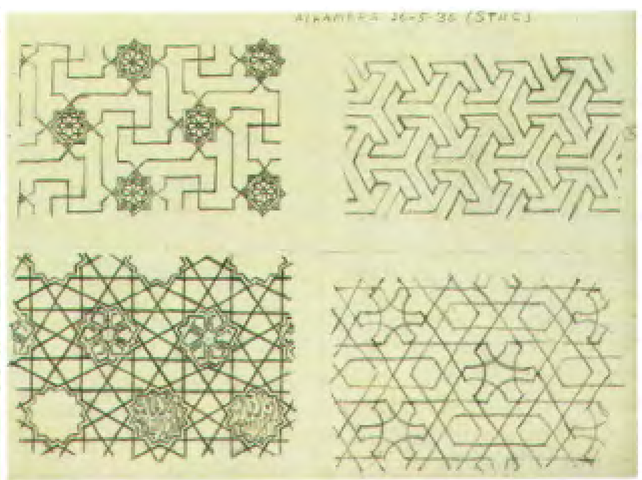


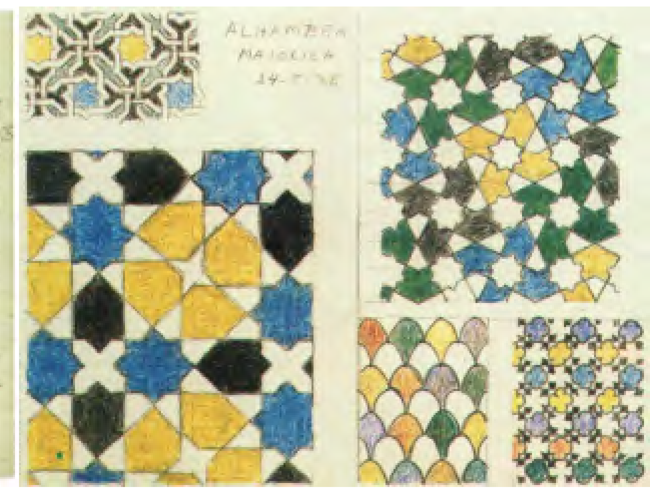


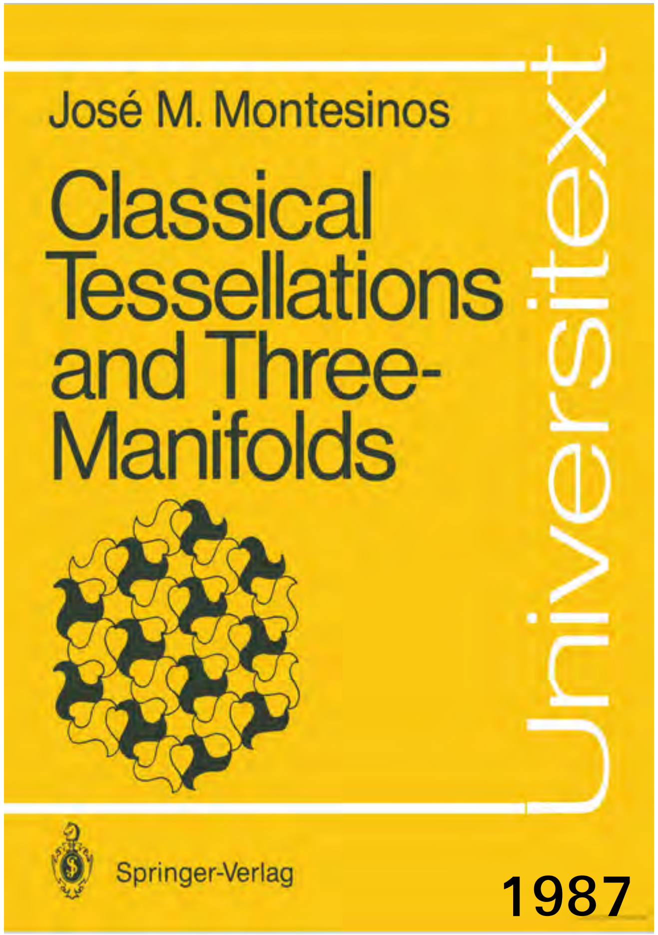
Tes

(Al-Ándalus, 711-1492)









What Symmetry Groups Are Present in the Alhambra?

Branko Grünbaum

2006

SYMMETRY GROUPS IN THE ALHAMBRA

Maria Francisca Blanco Blanco[1]
Ana Lúcia Nogueira de Camargo Harris[2]

2011

The Planar Crystallographic Groups Represented at the Alhambra

B. Lynn Bodner
Mathematics Department
Cedar Avenue
Monmouth University

2013

Festival da MATEMÁTICA

RIO DE JANEIRO > 2017

Definições

- Tesselação / ladrilhado (*tesselation* / *tiling*)

tes·se·la |é|

substantivo feminino

1. Pedra quadrada para lajear compartimentos de um edifício.
2. Cubo ou peça de mosaico.

- Cobertura sem sobreposição com azulejos (*tiles*)

Azulejos

Azulejos:

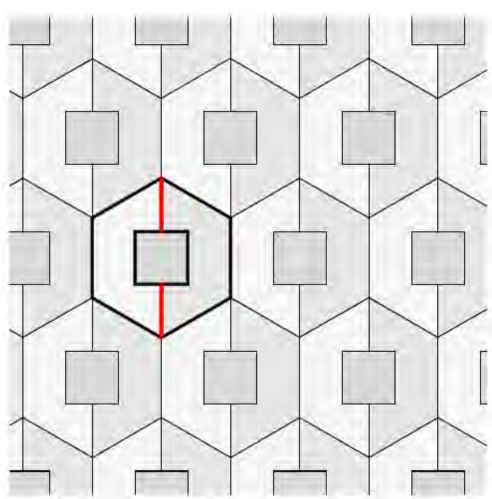
1. Topologicamente equivalentes ao disco fechado.
2. Todo ponto do plano pertence a um azulejo.
3. Interseções entre eles não contém pontos interiores.
4. Uniformemente limitados por fora e por dentro.

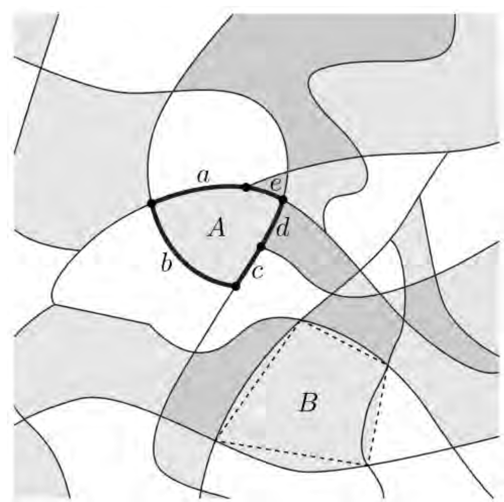
Observação:

- Sem 2 temos um empacotamento.
- Sem 3 temos uma cobertura.

- As fronteiras dos azulejos podem ser interpretadas como uma partição do plano.
- Essa partição pode ser decomposta em nós e arestas e interpretada como uma malha.

Tesselação Normal: as interseções entre dois azulejos são: vazias, um ponto (nó-) ou curvas conexas (aresta).





- Os conjuntos:
  - T de azulejos
  - E de arestas
  - V de nós ou vértices

  determinam a estrutura combinatória de uma tesselação, e permitem determinar equivalências.

- Um parche ou mosaico é uma região do plano coberta por alguns azulejos.
  - Na prática é o que podemos desenhar.
  - Elemento básico para provar algumas afirmações.

Azulejos congruentes

- Se existe um (conjunto) protótipo de azulejo, chamamos a tesselação de:
  - Monoedral, diedral,...
  - **k**-edral, conjunto de **k** protótipos.

- Se uma configuração de cópias de um conjunto **P** de protótipos cobre o plano, dizemos que **P** admite essa tesselação.

- Dado um conjunto P, decidir se é um conjunto de protótipos para uma tesselação é formalmente indecisível.

Teorema de extensão

Se para qualquer $\mathbf{r}>0$, existe um parche de azulejos de **P** que contém um disco de rádio **r**, então **P** admite uma tesselação do plano.

O teorema justifica a construção de tesselações por subdivisão.

Na prática, só estamos interessados em tesselar áreas de tamanhos arbitrários.

Simetria

1. Identidade
2. Reflexão (por retas)
3. Rotação
4. Traslação
5. Reflexão deslizante

Isometrias.

- Grupo de operações é fechado por composições.
- Congruência.
- Periodicidade.

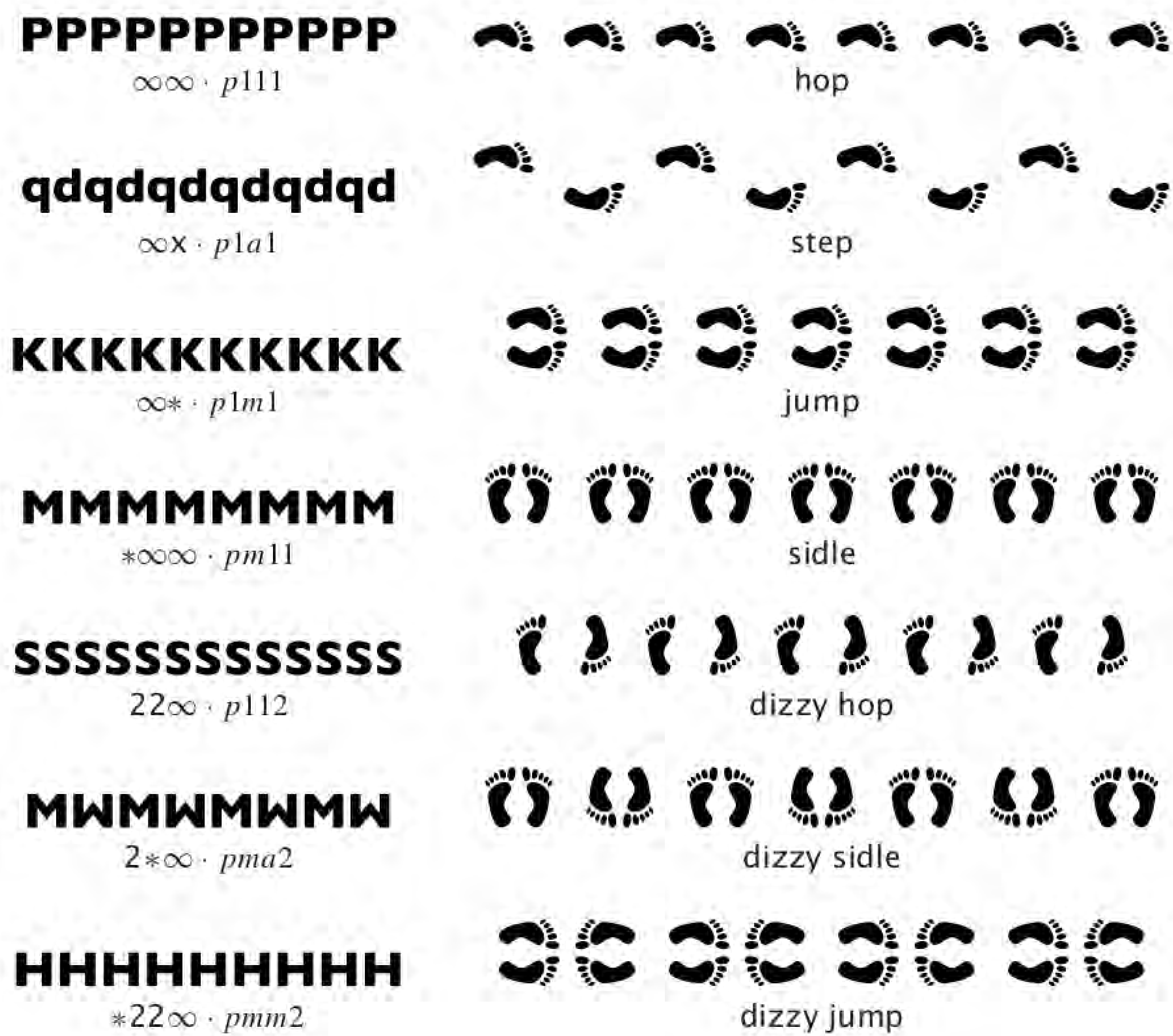
Órbitas: imagem de um objeto sob o grupo.

Dois grupos de simetria G e H são equivalentes se existe uma transformação afim A:

$$H = AGA^{-1}$$

- Apenas rotações: grupos cíclicos
- Traslações paralelas: grupos de frisos (7)
- Traslações em direções l.i.: grupos de tesselações (17)
  - → Grupos cristalográficos (Fedorov, 1891)


Mandalas e Rosetas
0:00 / 1:12


PPPPPPPPPPPP
∞∞ · p111
hop
qdqdqdqdqd
∞x · p1a1
step
KKKKKKKKKK
∞* · p1m1
jump
MMMMMMMM
*∞∞ · pm11
sidle
SSSSSSSSSSSSS
22∞ · p112
dizzy hop
MWMWMWMW
2*∞ · pma2
dizzy sidle
HHHHHHHHH
*22∞ · pmm2
dizzy jump


Tesselados - Parte I
0:00 / 2:19


Tesselados - Parte II
0:00 / 2:40


Tesselados do Rio
0:00 / 1:46

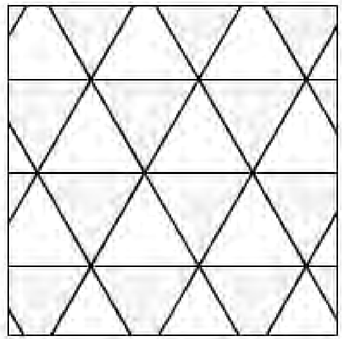
patterninislamicart.com/drawings-diagrams-analyses

- Como encontrar e identificar os 17 grupos?
  - A pergunta sobre a Alhambra tem resposta?

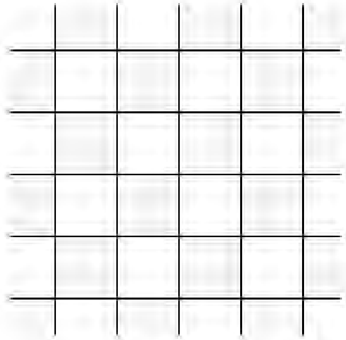
- Periodicidade herdada das órbitas, padrões.

Construções:

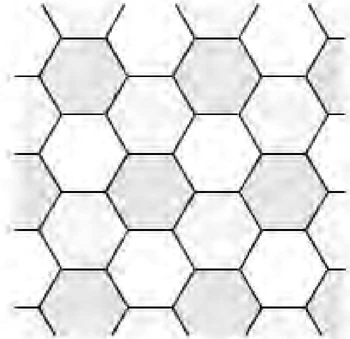
- Apenas polígonos regulares → Arquimedianas
- Duais (Laves)
- Aperiódicos:
  - Subdivisão → Ammann
  - Penrose
- Resultados recentes...



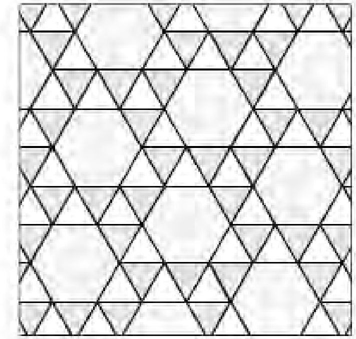
(3^6)



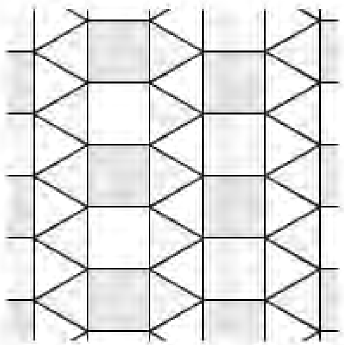
(4^4)



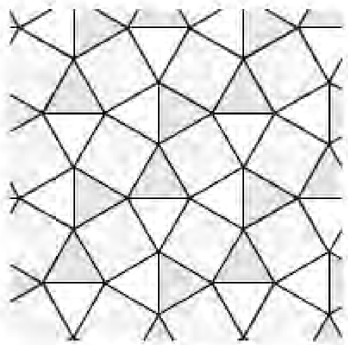
(6^3)



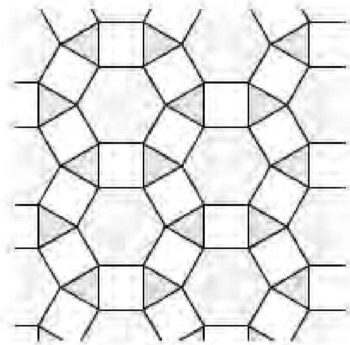
$(3^4.6)$



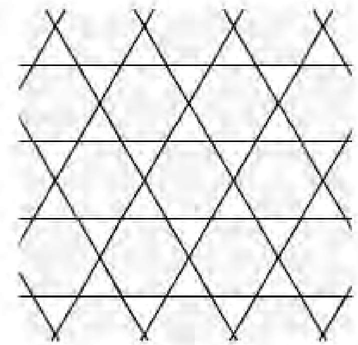
$(3^3.4^2)$



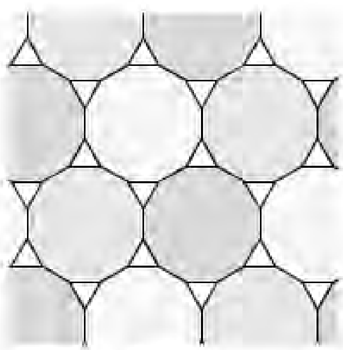
$(3^2.4.3.4)$



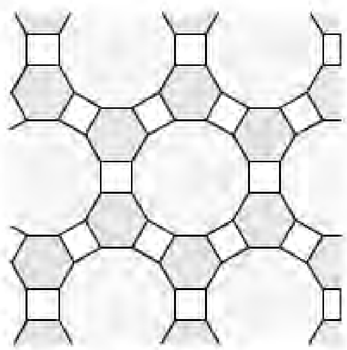
(3.4.6.4)



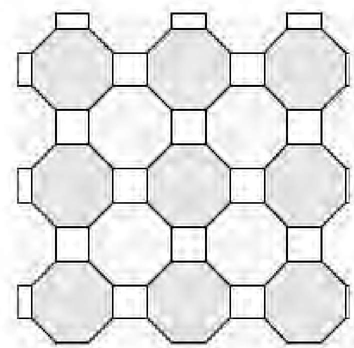
(3.6.3.6)



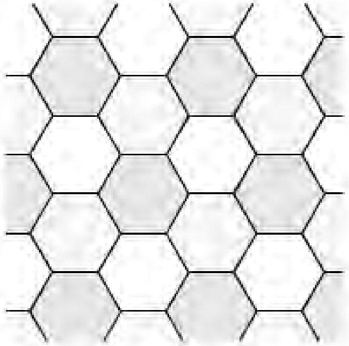
(3.12^2)



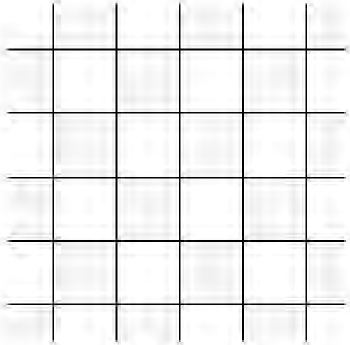
(4.6.12)



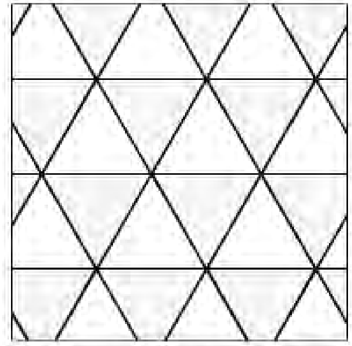
(4.8.8)



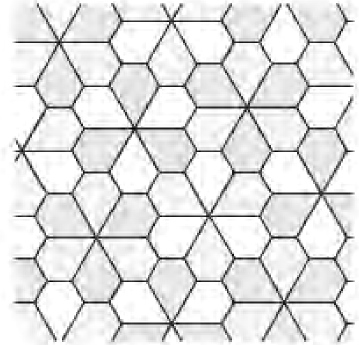
$[3^6]$



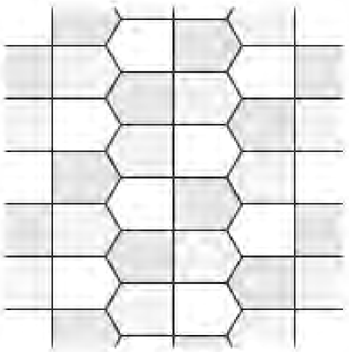
$[4^4]$



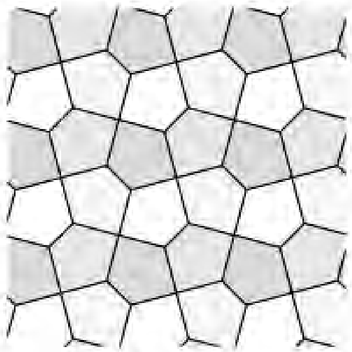
$[6^3]$



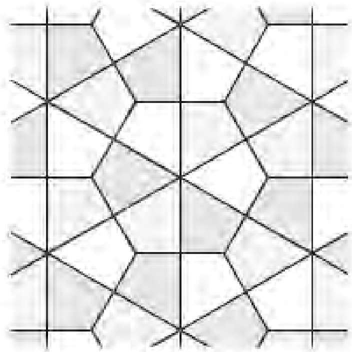
$[3^4.6]$



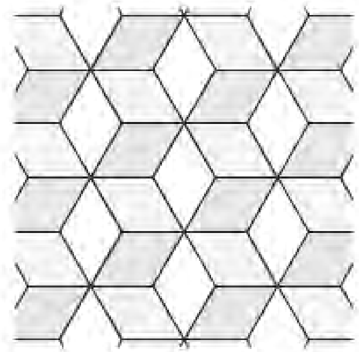
$[3^3.4^2]$



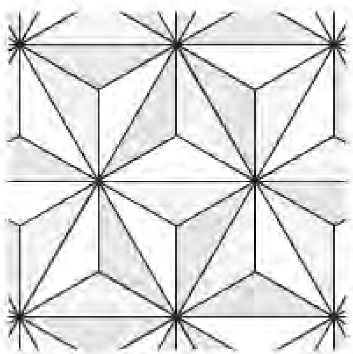
$[3^2.4.3.4]$



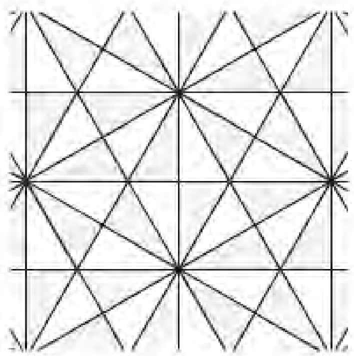
[3.4.6.4]



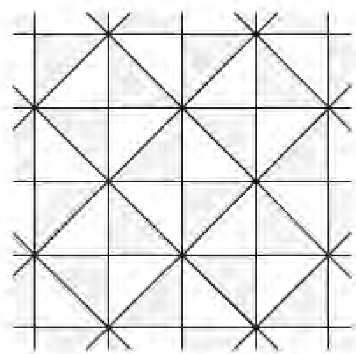
[3.6.3.6]



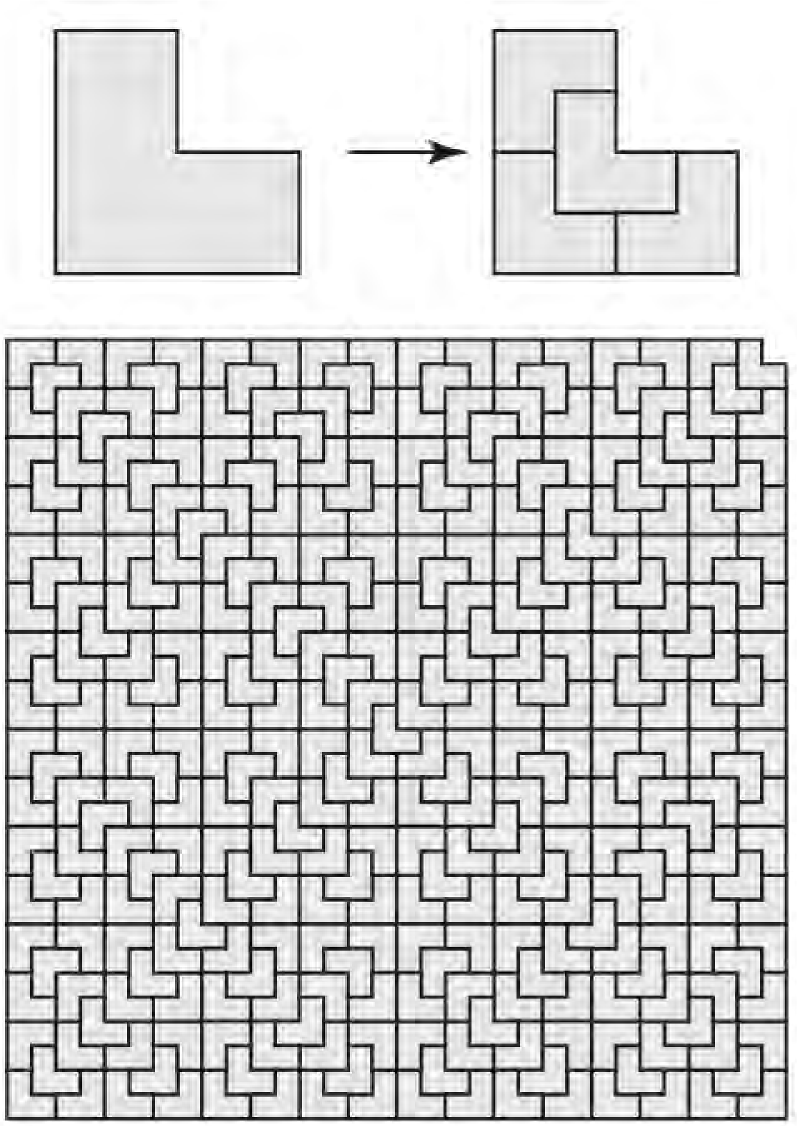
$[3.12^2]$

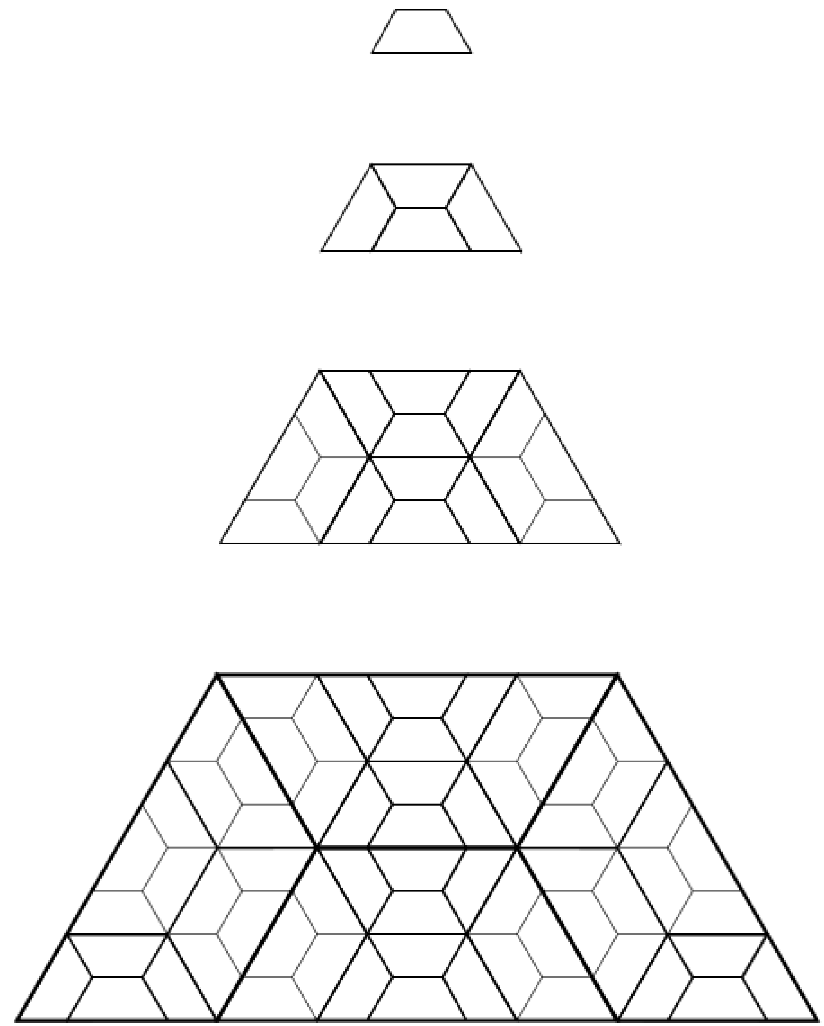


[4.6.12]

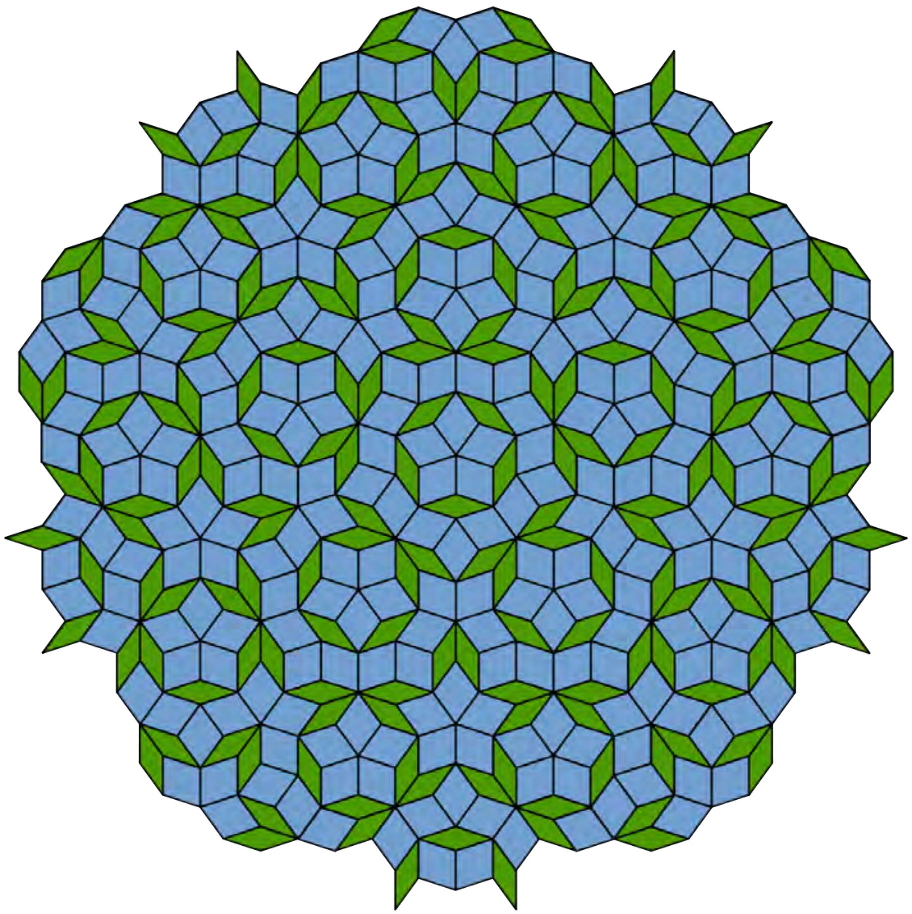


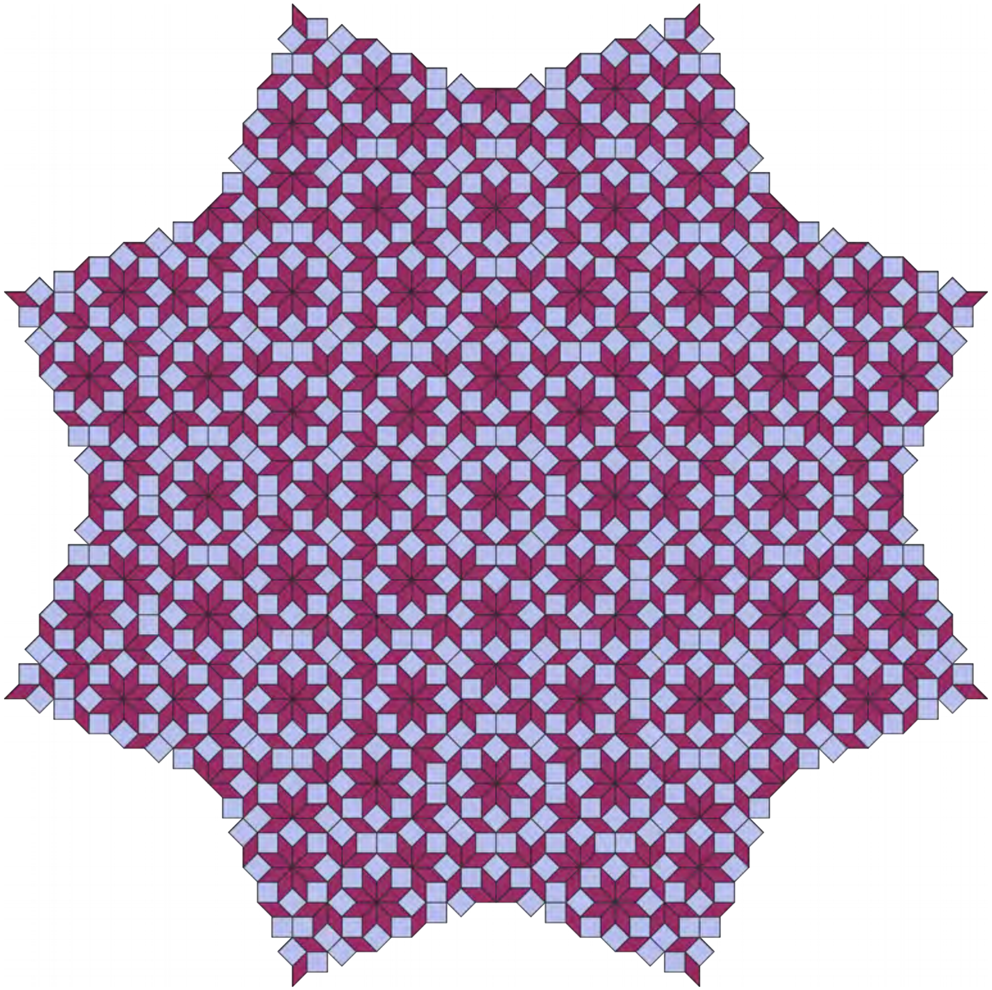
[4.8.8]





Penrose



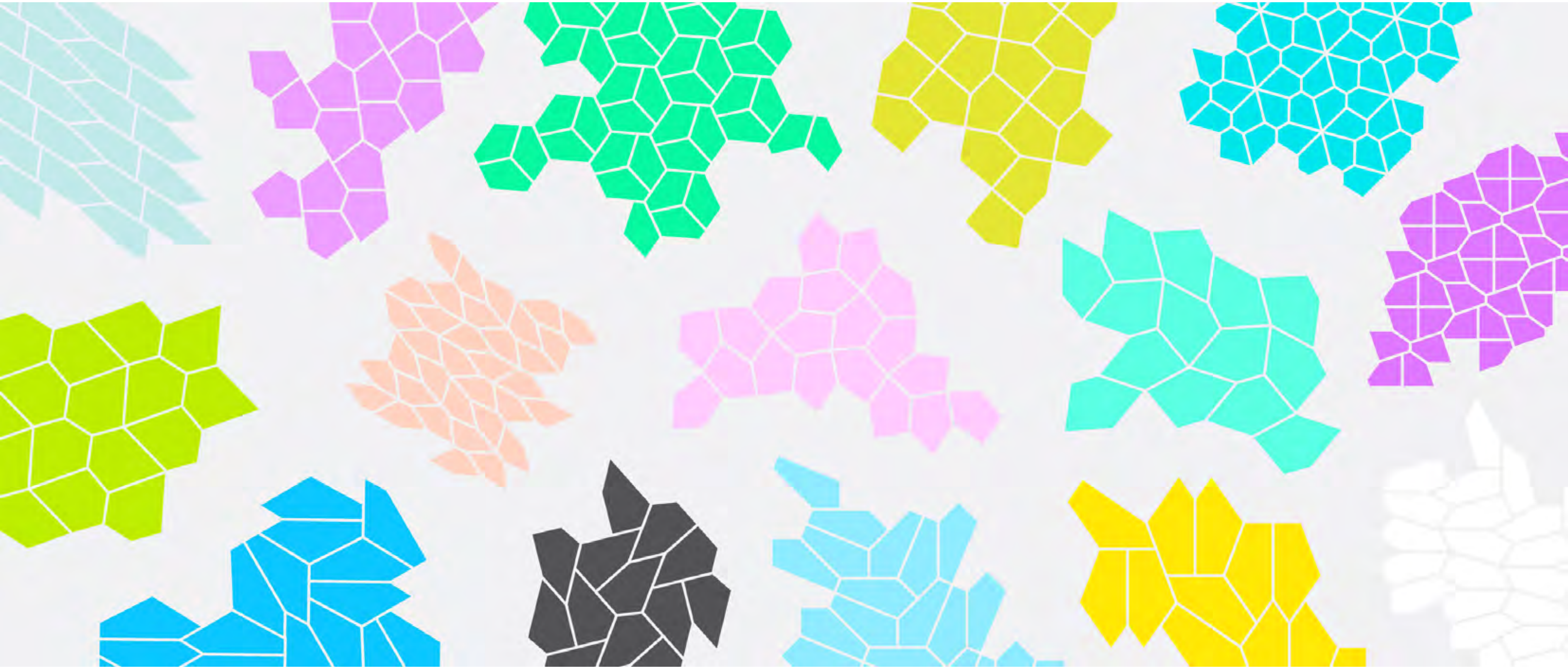


Ammann

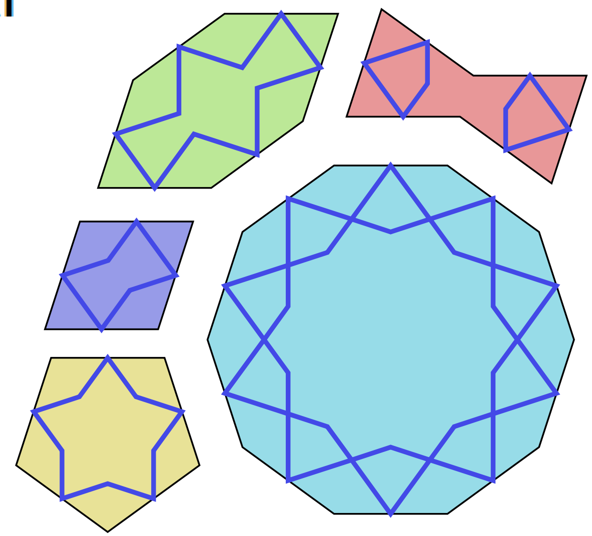
Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane

Michaël Rao

July 28, 2017



Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture
Peter J. Lu, *et al.*
Science **315**, 1106 (2007);
DOI: 10.1126/science.1135491

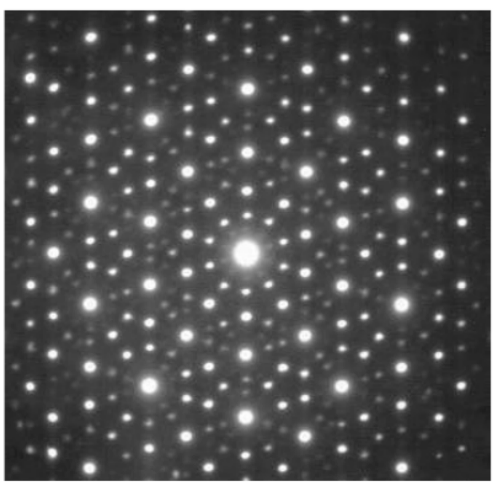


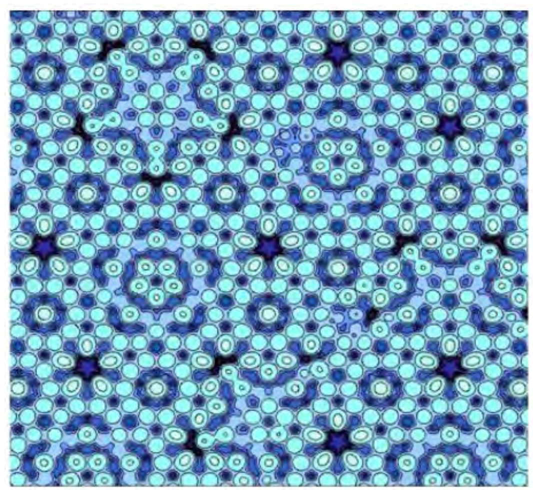
Islamic tiles reveal sophisticated maths

Muslim artists were 500 years ahead of western researchers.

Philip Ball

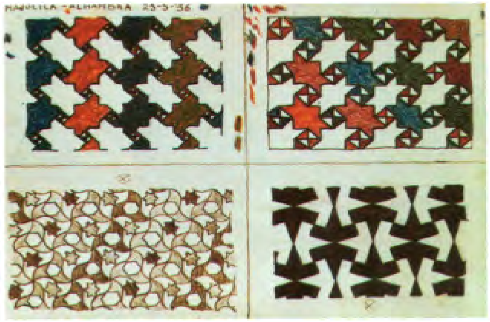
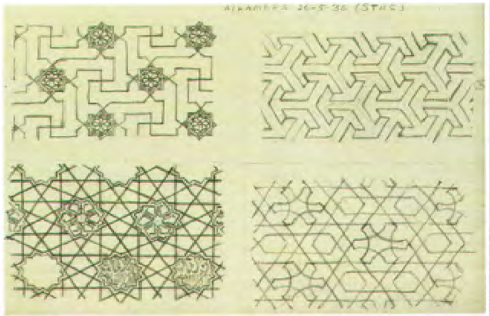
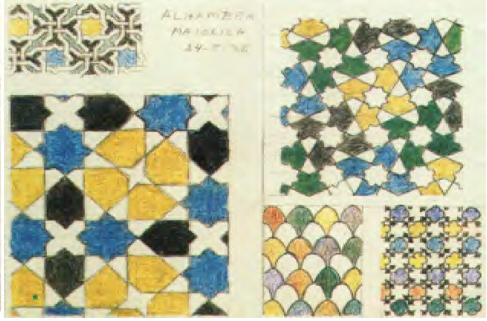
Nature, 2007

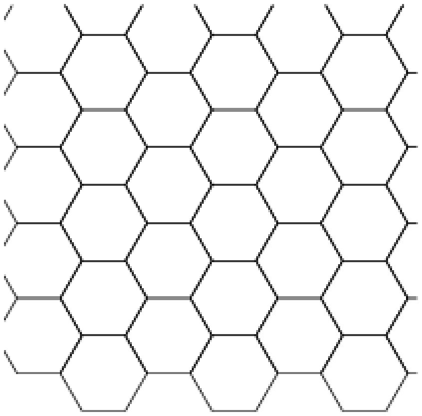


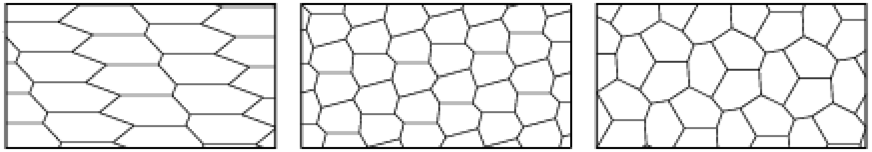


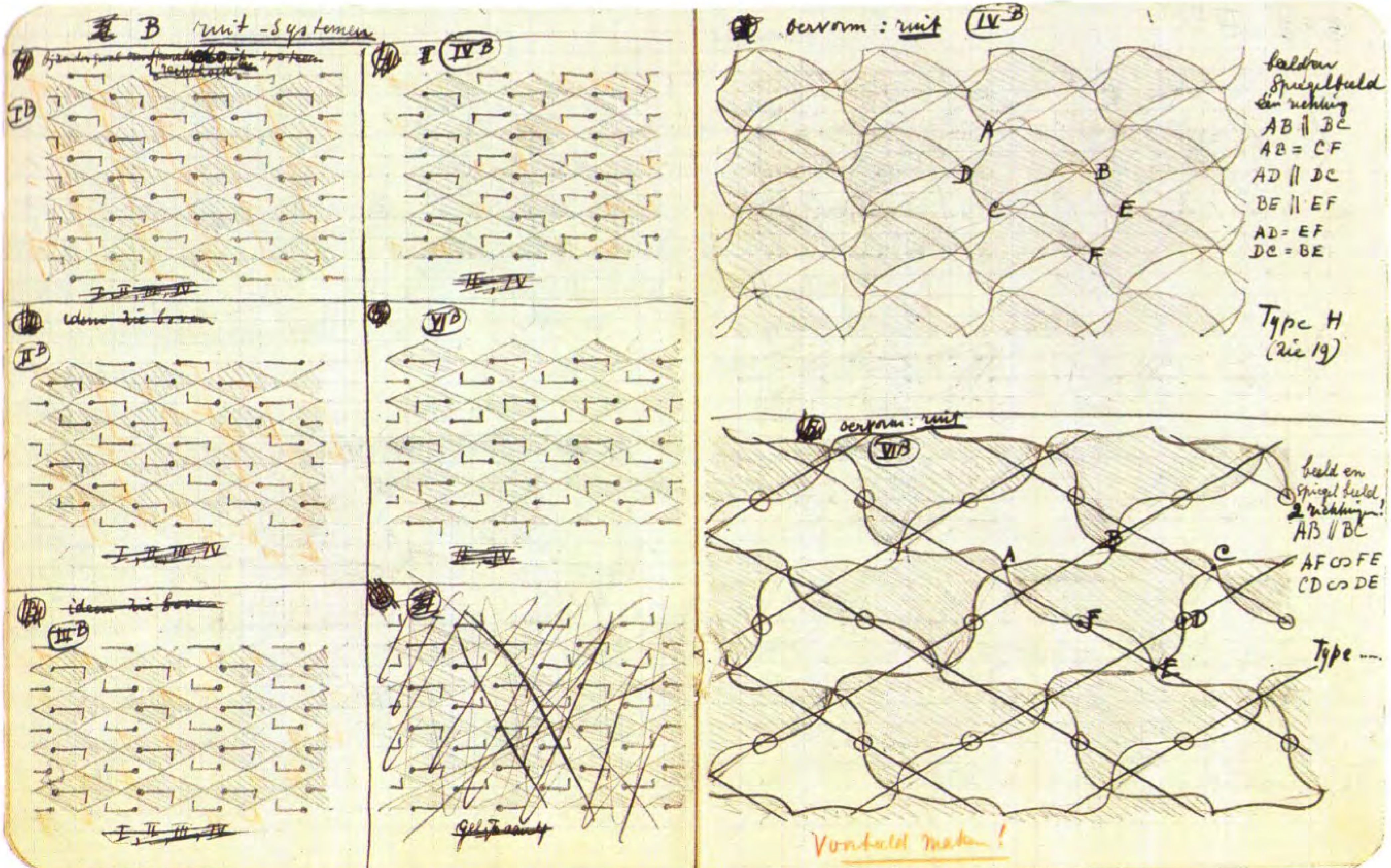
De volta na Alhambra com Escher...

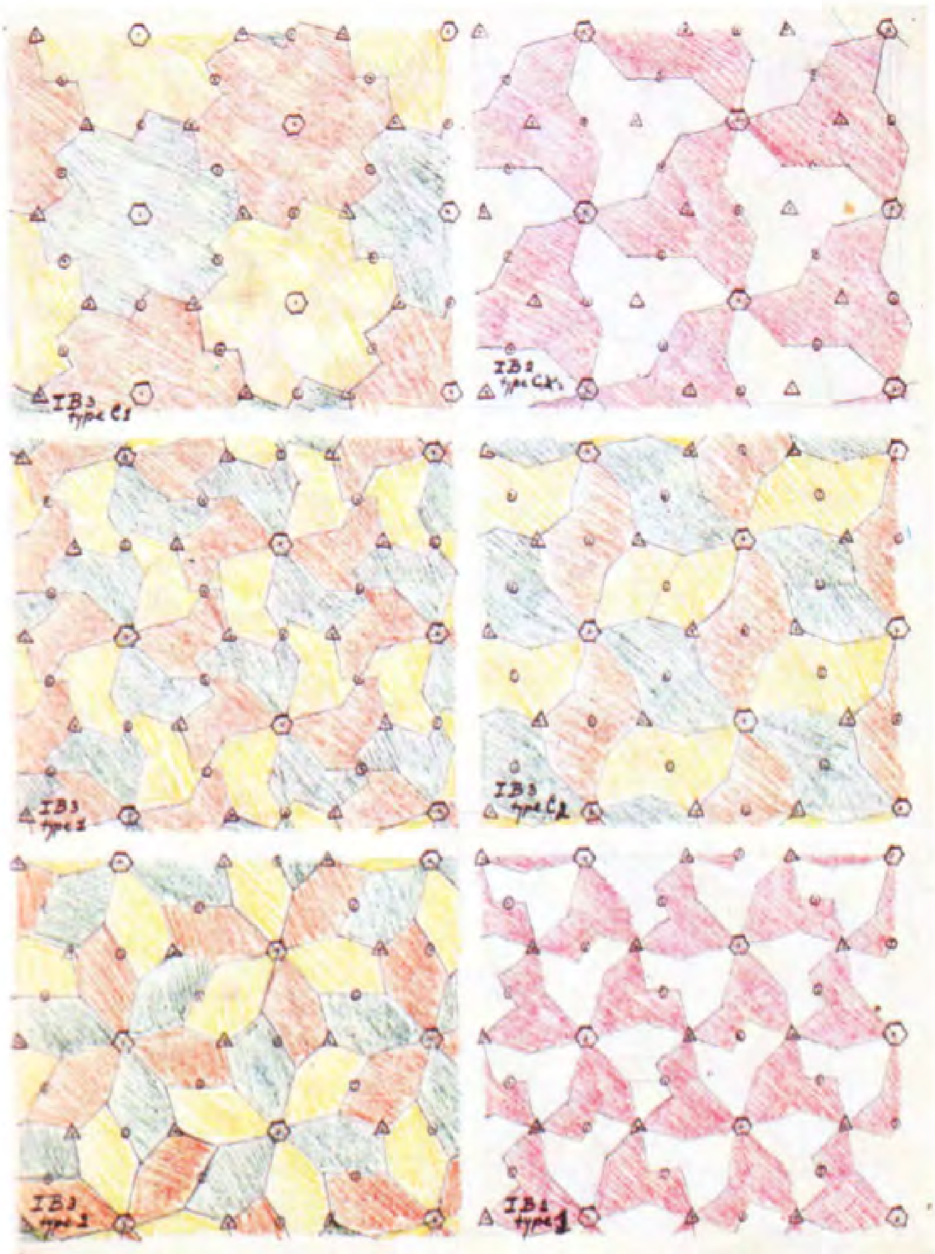
(Al-Ándalus,
711-1492)

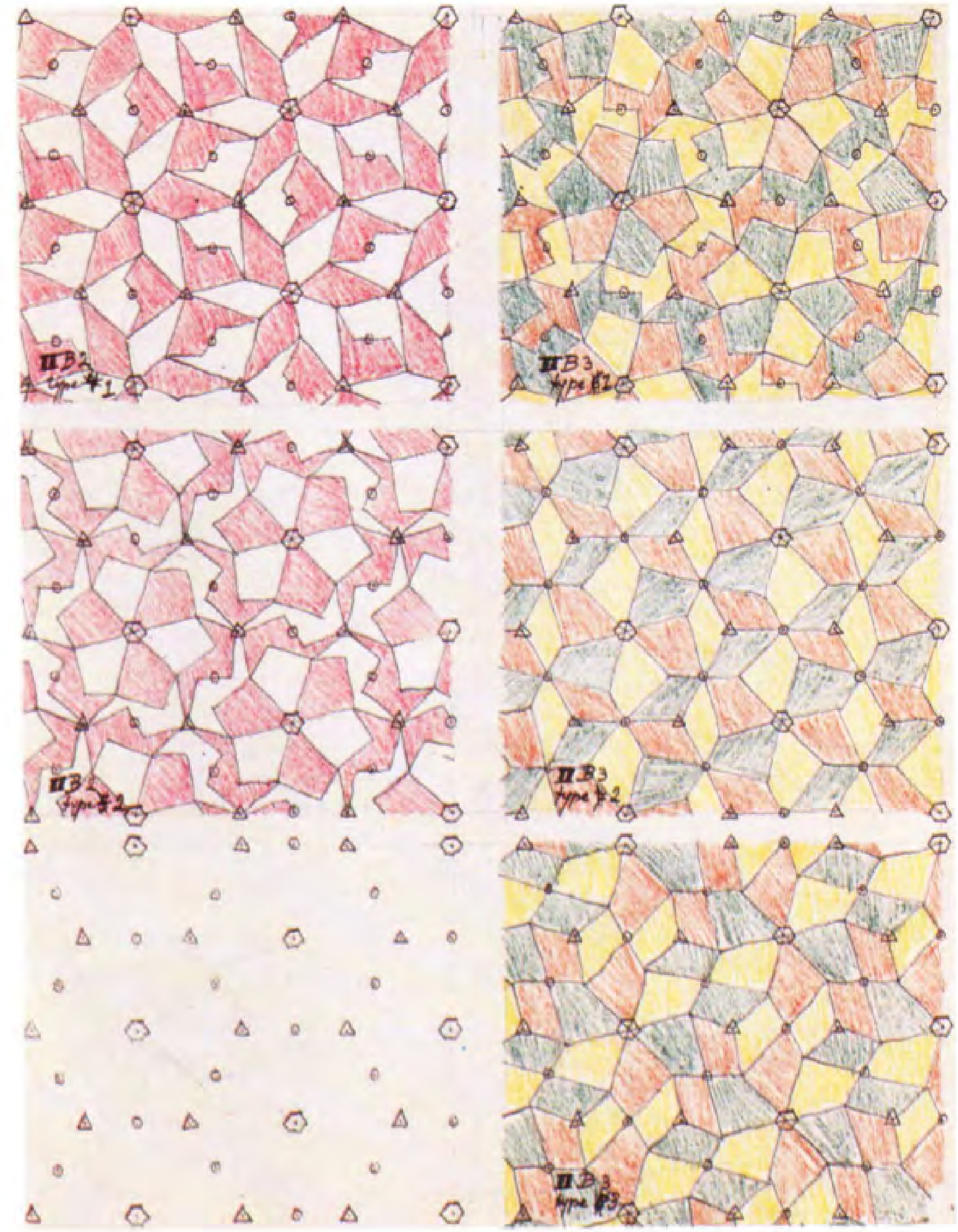




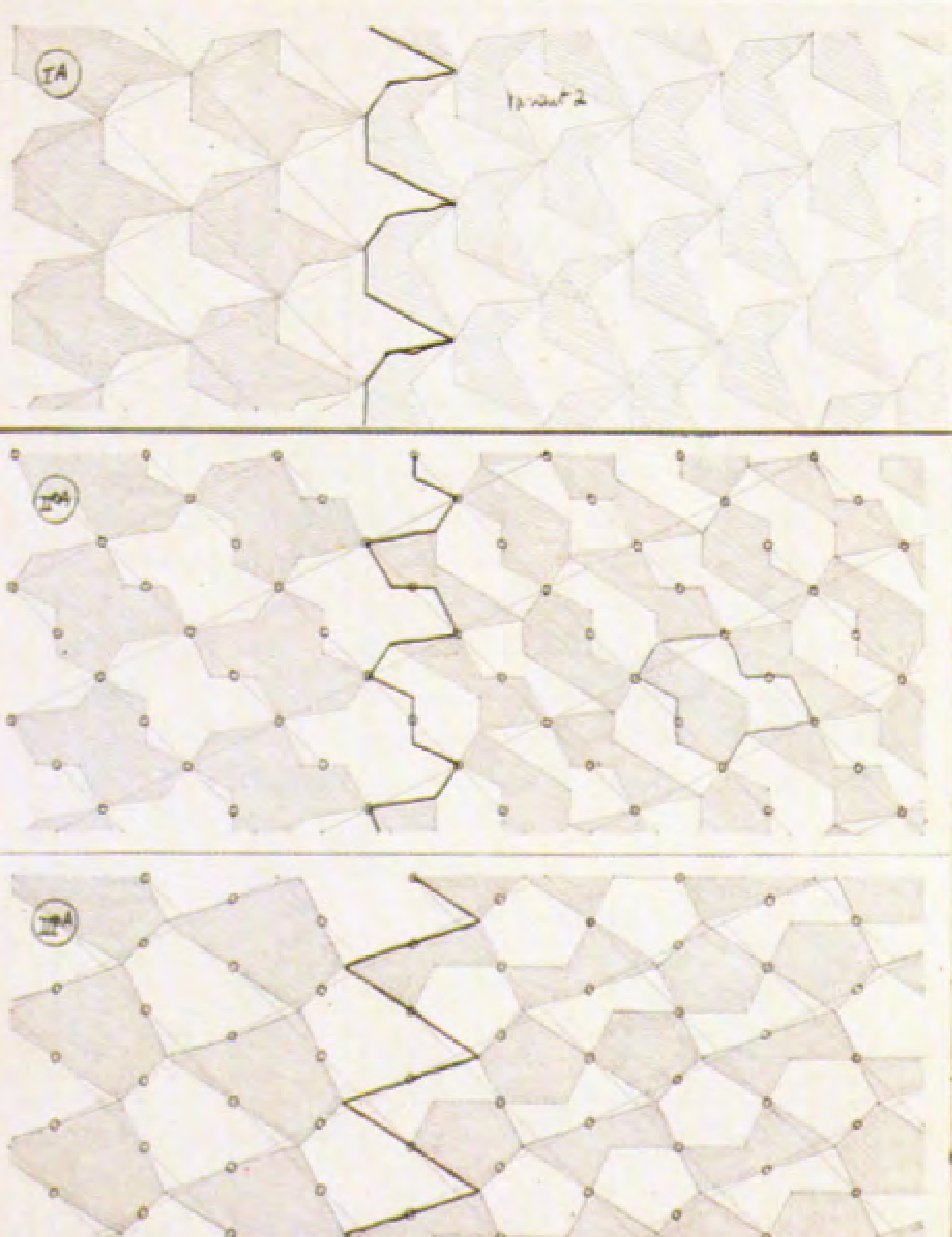




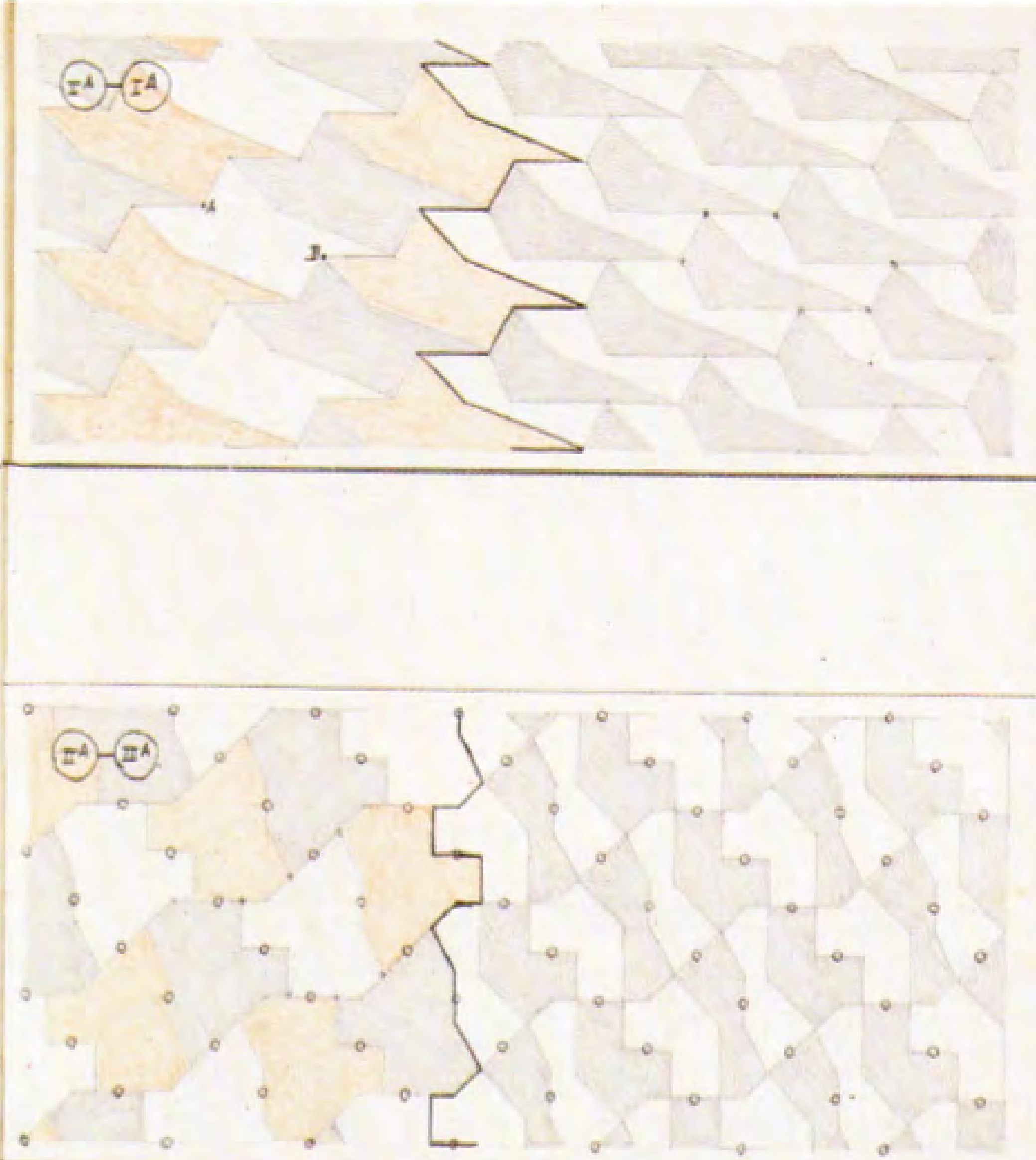

AB ∥ BC
AB = CF
AD ∥ DC
BE ∥ EF
AD = EF
DC = BE



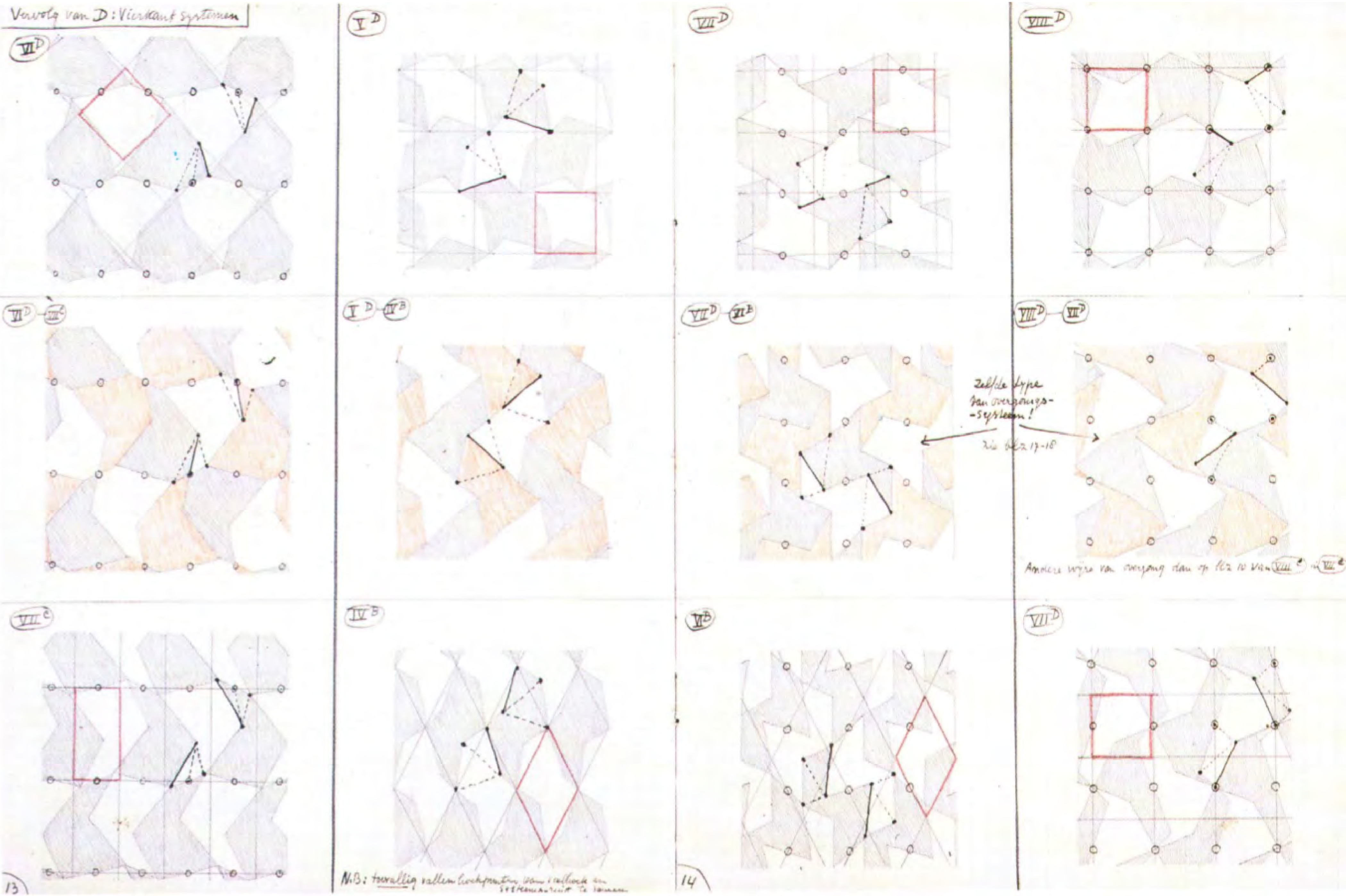




21)

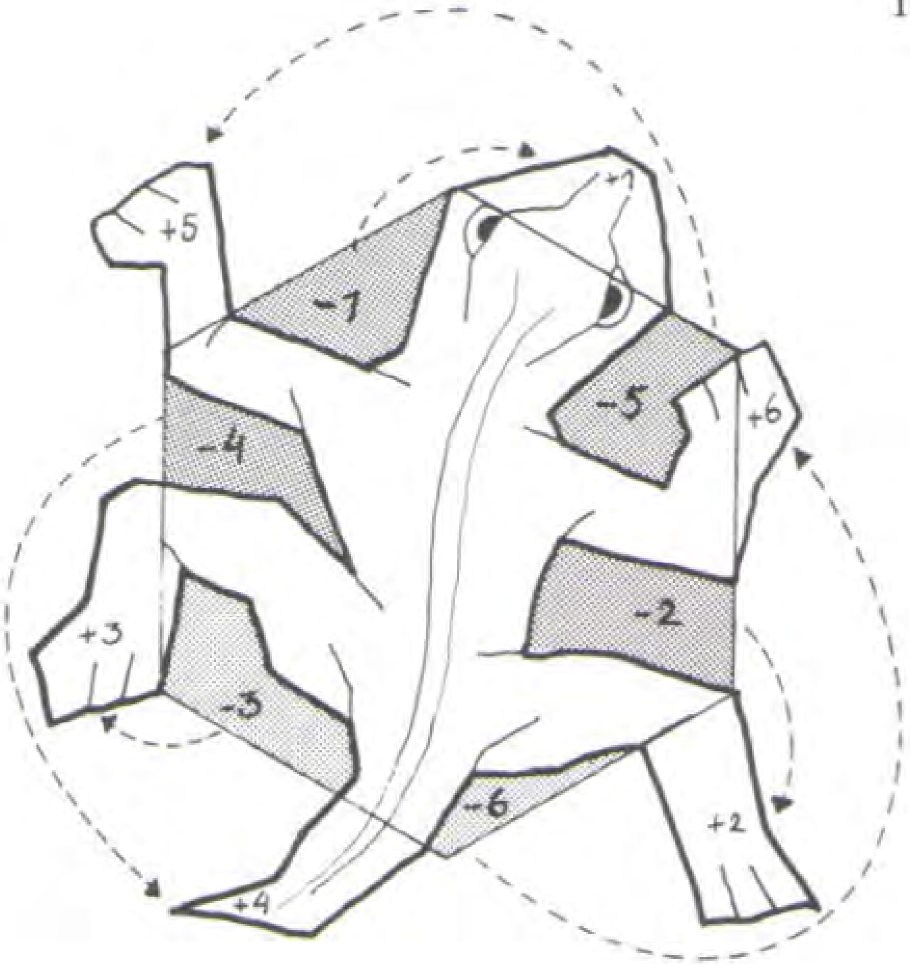


22)

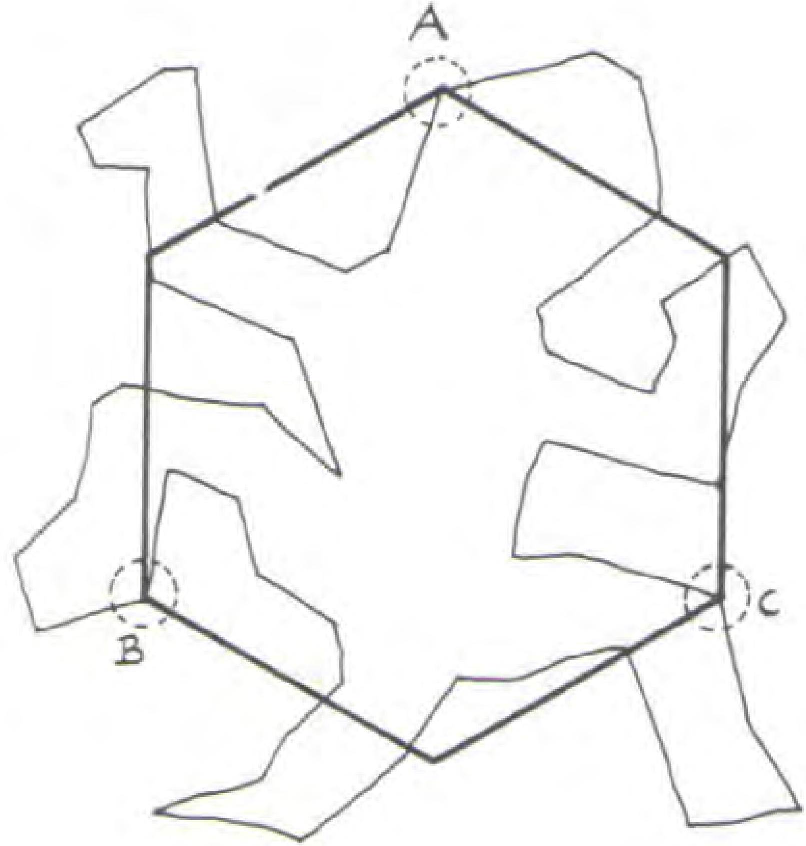


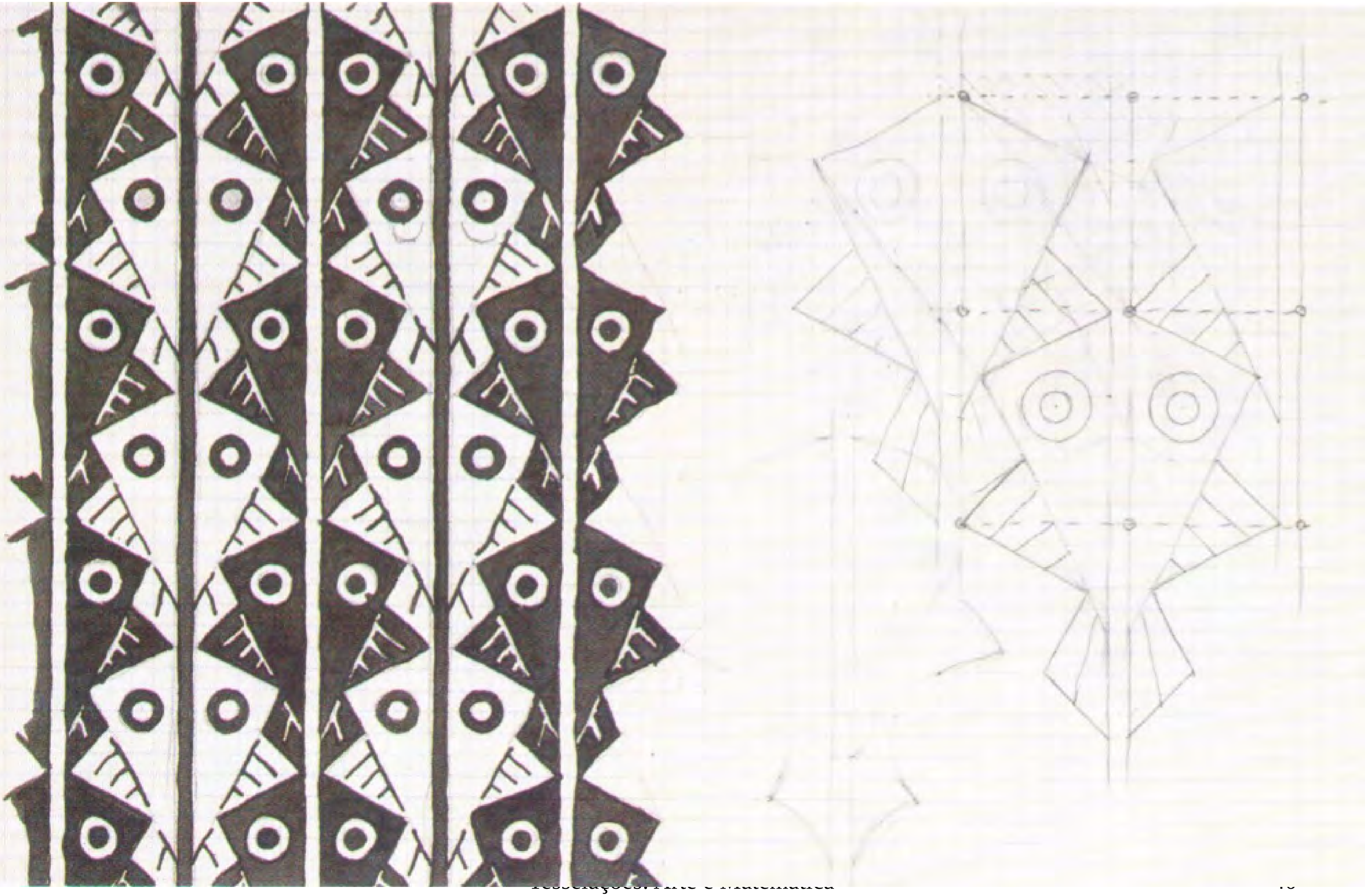
Vervolg van D: Vierkant systemen
VI D
V D
VII D
VIII D
VI D – VII C
V D – IV B
VII D – VI B
VIII D – VII D
Zelfde type van overgangs-systeem!
zie blz 17-18
VII C
IV B
VI B
VII D
N.B.: toevallig
13
14

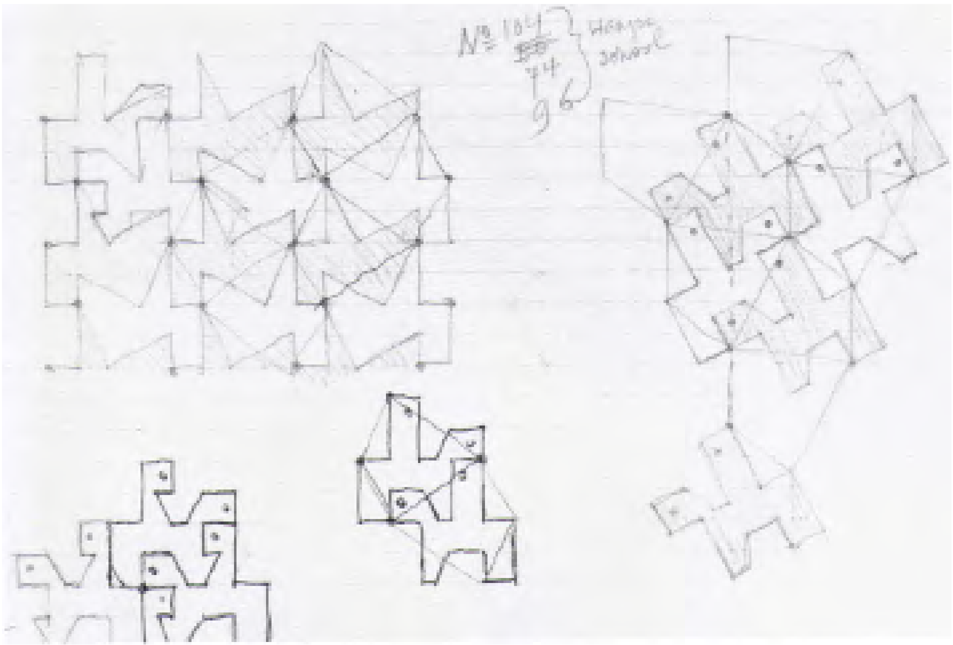
12

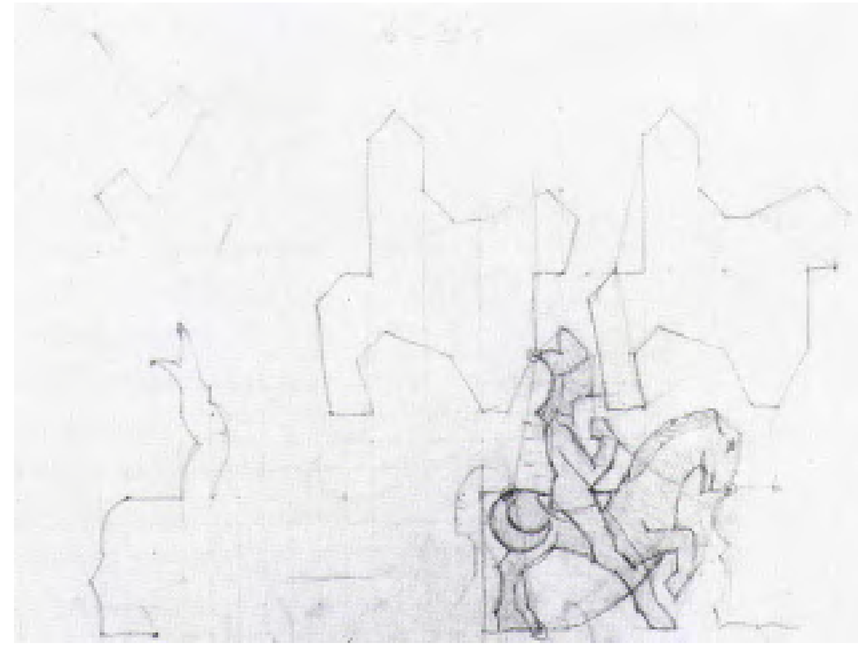


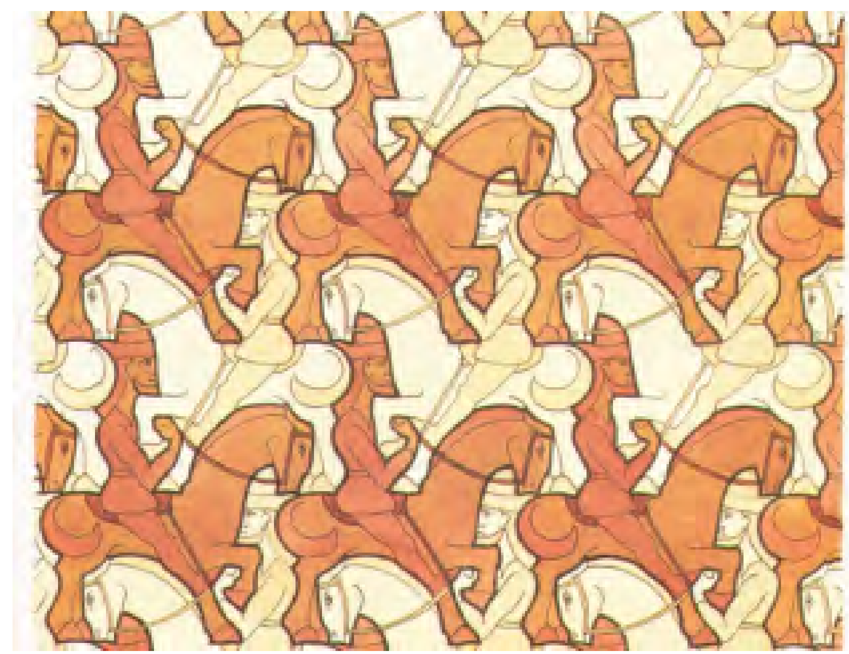
13

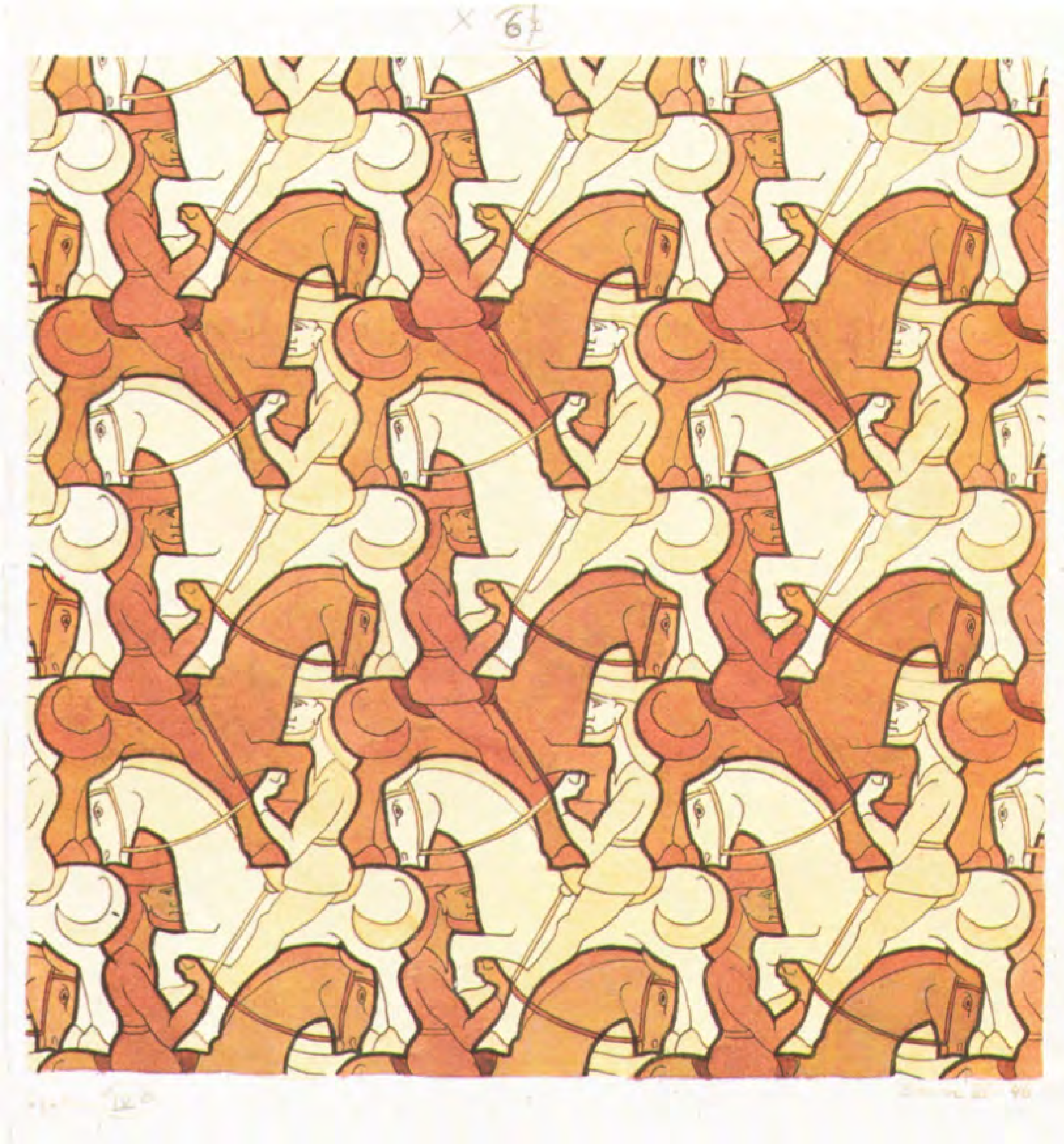













Aprendendo com Escher
0:00 / 3:18

impa

Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Festival da MATEMÁTICA

RIO DE JANEIRO > 2017

Visgraf Vision and Graphics Laboratory

MANDALAS E TESSELADOS: ARTE GEOMÉTRICA

FESTIVAL DA MATEMÁTICA 2017: OFICINA CRIATIVA

J. EZEQUIEL SOTO S.

http://w3.impa.br/~cheque/fm2017/

Referências

COXETER, H.S.M.; MOSER, W.O.J.; 1980 (4a). *Generators and Relations for Discrete Groups*.

ESCHER, M.C.; 1972. *Le monde de M.C. Escher: l'oeuvre de M.C. Escher* (commenté par J.L. Locher).

SUTTON, Daud; 2007. *Islamic Design: A genius for geometry*.

GRÜNBAUM, Branko; SHEPARD, G.C.; 1987. *Tilings and Patterns*.

KAPLAN, Craig; 2009. *Introductory Tiling Theory for Computer Graphics*.

SCHATTSCHNEIDER, Doris; 1990. *Visions of symmetry : notebooks, periodic drawings, and related work of M.C. Escher*.

WADE, David; 1982. *Geometric Patterns & Borders*.

17 Wallpaper Groups
http://clowder.net/hop/17walppr/17walppr.html

Art of the Islamic World: A Resource for Educators. Edited by Maryam D. Ekhtiar and Claire Moore.
http://www.metmuseum.org/learn/educators/curriculum-resources/art-of-the-islamic-world

Islamic Art and Geometric Design. Activities for Learning. The Metropolitan Museum of Art.
http://britton.disted.camosun.bc.ca/Islamic_Art_and_Geometric_Design.pdf

M.C.Escher Oficial Website.
http://www.mcescher.com/

Pattern in Islamic Art. WADE, David; 2017.
http://patterninislamicart.com/drawings-diagrams-analyses

Symmetry and Ornament. JABLAN, Slavik; 1995.
https://www.emis.de/monographs/jablan/

Tiling Encyclopedia. FRETTLÖH, Dirk.
http://tilings.math.uni-bielefeld.de/

http://geometrygames.org/KaleidoPaint/index.html