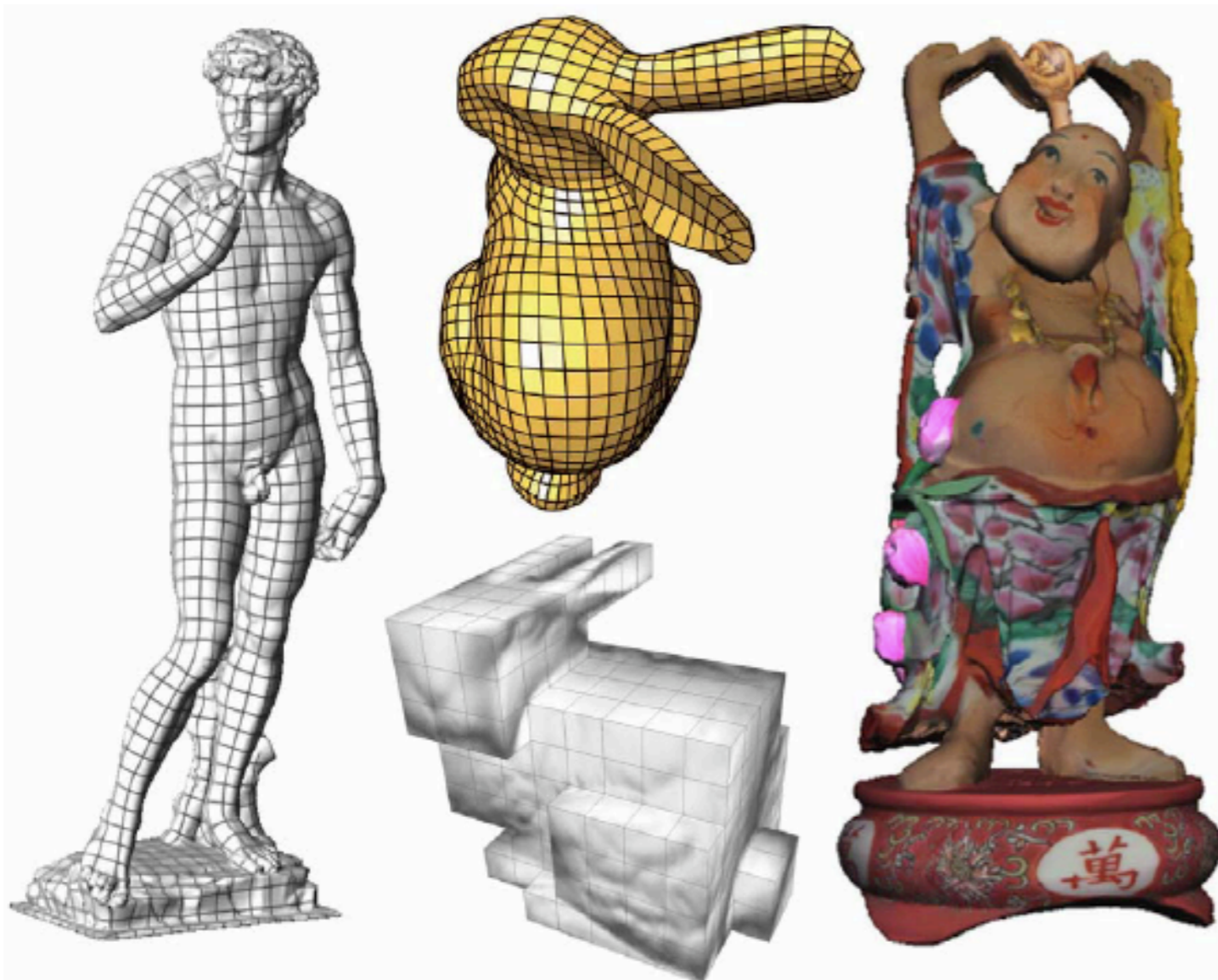
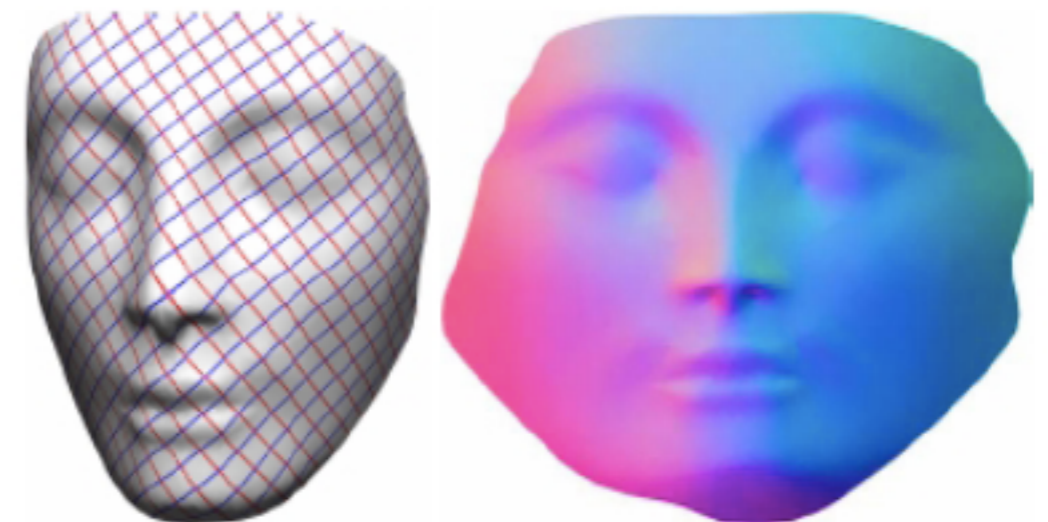


Parametrização de Malhas

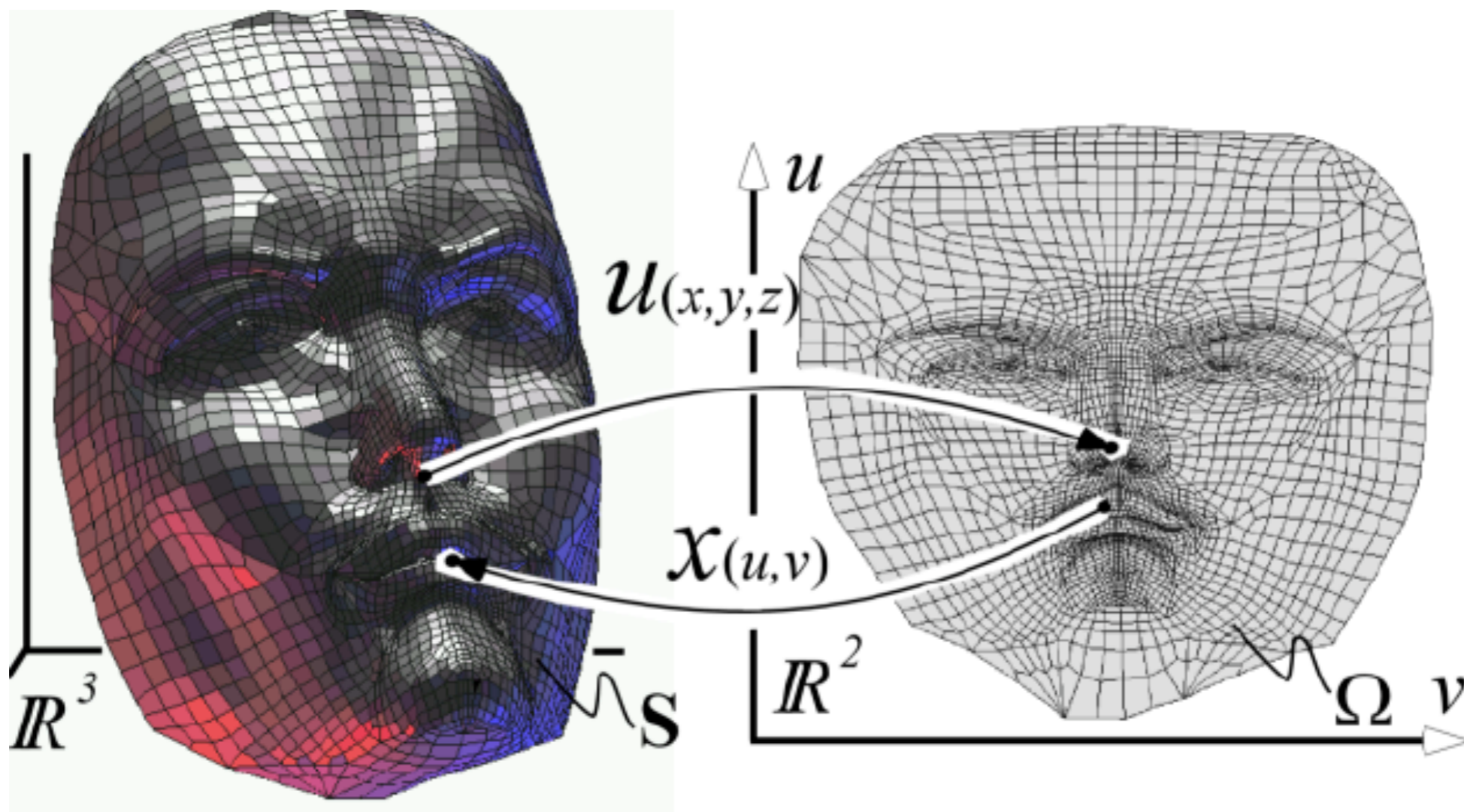


Thales Vieira



Definição do problema

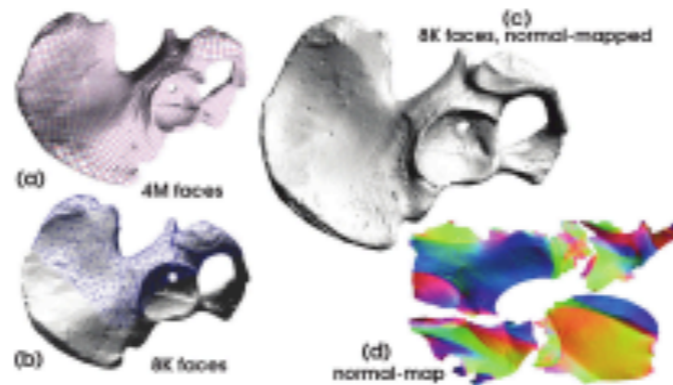
- Dada uma superfície S em \mathbb{R}^3 e um domínio D , encontrar $F: D \leftrightarrow S$ (bijeção)



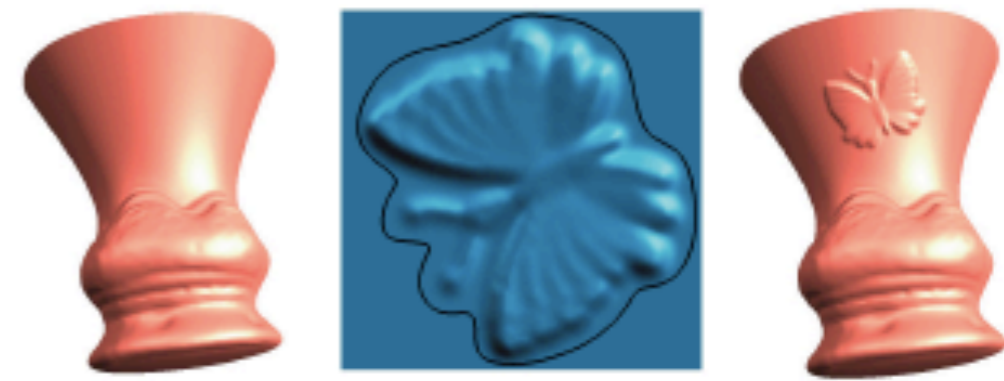
Aplicações em CG



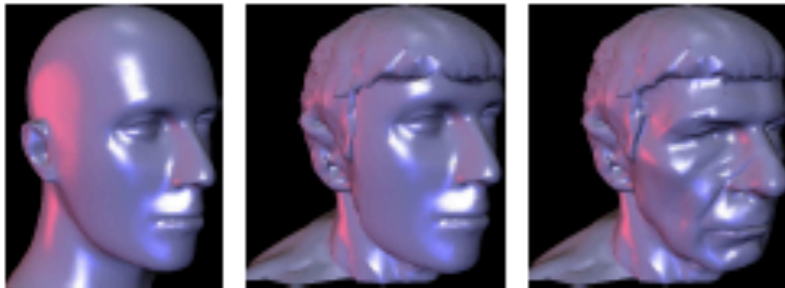
Texture Mapping



Normal Mapping



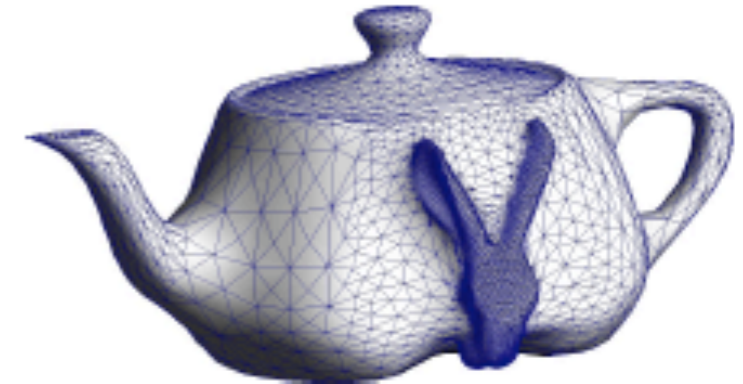
Detail Transfer



Morphing



Mesh Completion



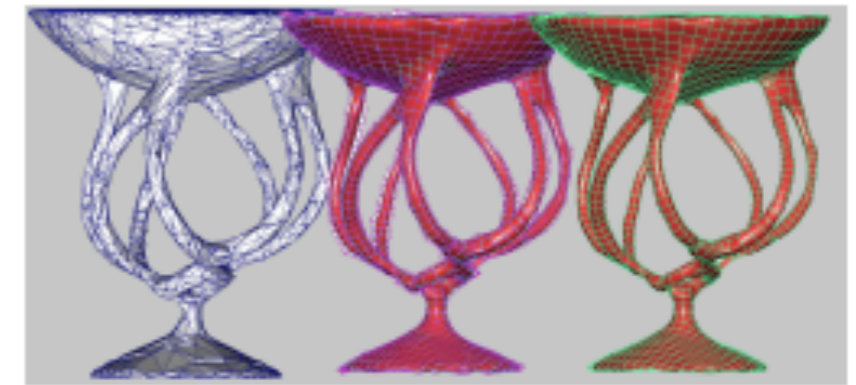
Editing



Databases

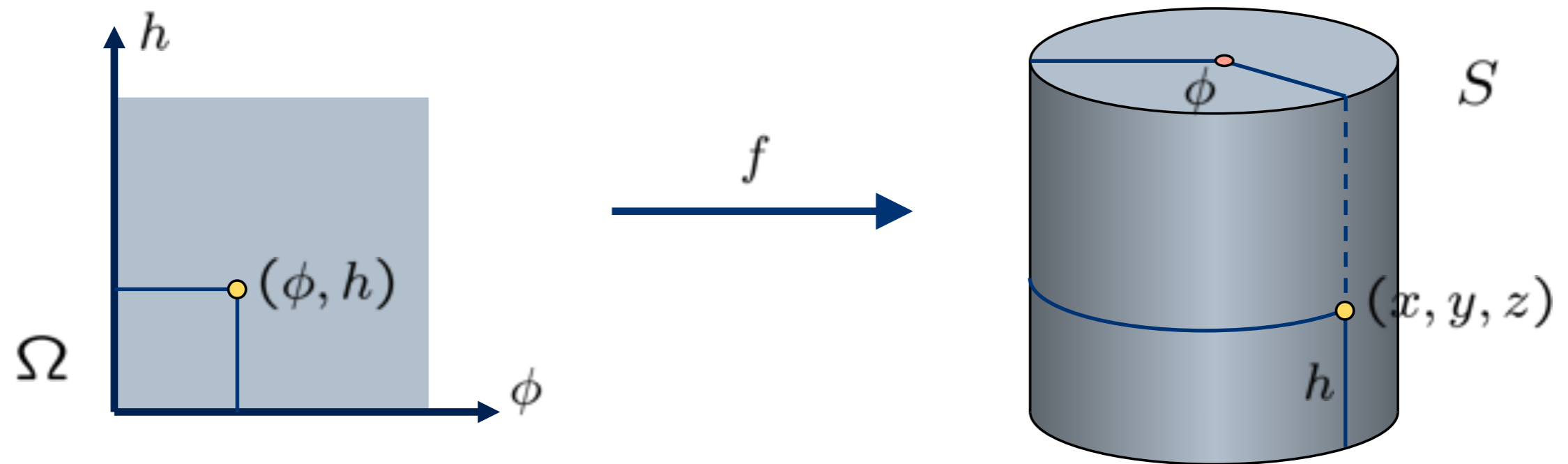


Remeshing



Surface Fitting

Exemplo: Parametrização do cilindro



- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$
- $\Omega = \{(\phi, h) \in \mathbb{R}^2 : \phi \in [0, 2\pi), h \in [0, 1]\}$
- $f(\phi, h) = (\sin \phi, \cos \phi, h)$

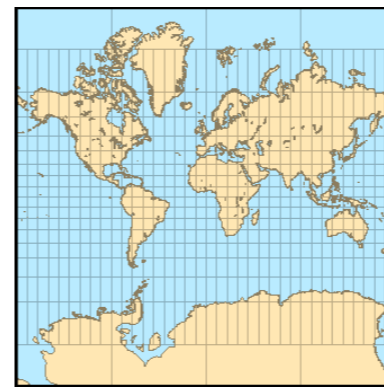
Parametrizações da Terra no plano



Proj.
Ortográfica
~ 500 B.C.



Proj.
Estereográfica
~ 150 B.C.



Proj.
Mercator
1569



Lambert
1569

Conforme
(Preserva ângulos)

Equiareal
(Preserva área)

Conforme + Equiareal ?

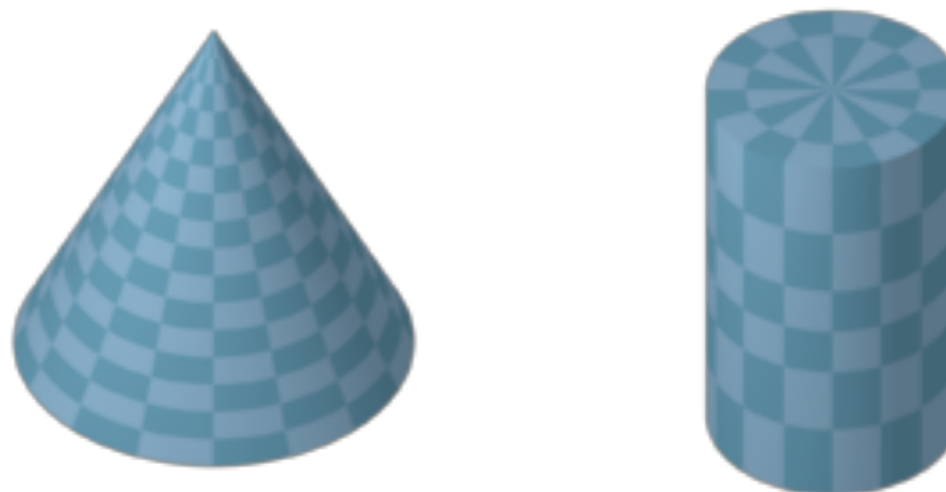
Distorção

- **Teorema Egregium** (C. F. Gauß)

“Uma superfície qualquer não pode ser parameterizada sem distorção.”

- Somente as superfícies com curvatura gaussiana nula admitem parametrização isométrica (superfícies regradas).

- Planos
- Cones
- Cilindros



O que é Distorção?

- **parameter point** $x = (u, v) \in \Omega$

- **surface point** $p = f(x) \in S$

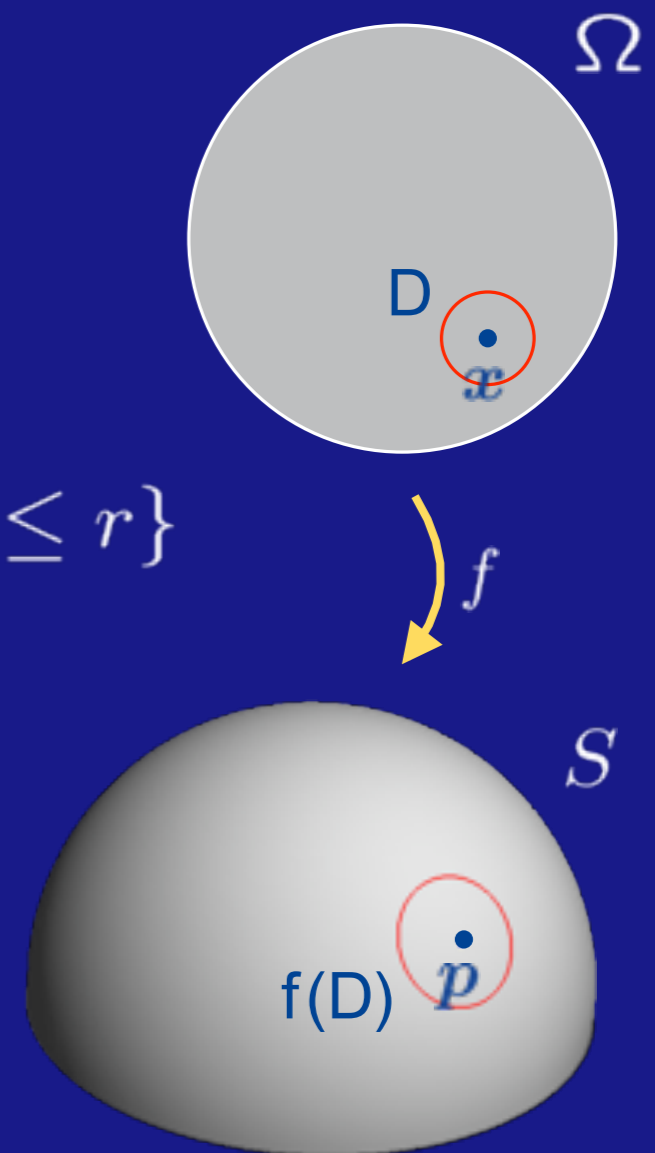
- **small disk** $D(x, r)$ around x

$$D = D(x, r) = \{y \in \Omega : \|x - y\| \leq r\}$$

- **image** of D under f

$$f(D) = \{f(y) : y \in D\} \subset S$$

- **shape** of $f(D)$



Linearização

- **Jacobian** of f

$$J_f = [f_u, f_v] \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

- **tangent plane** at p

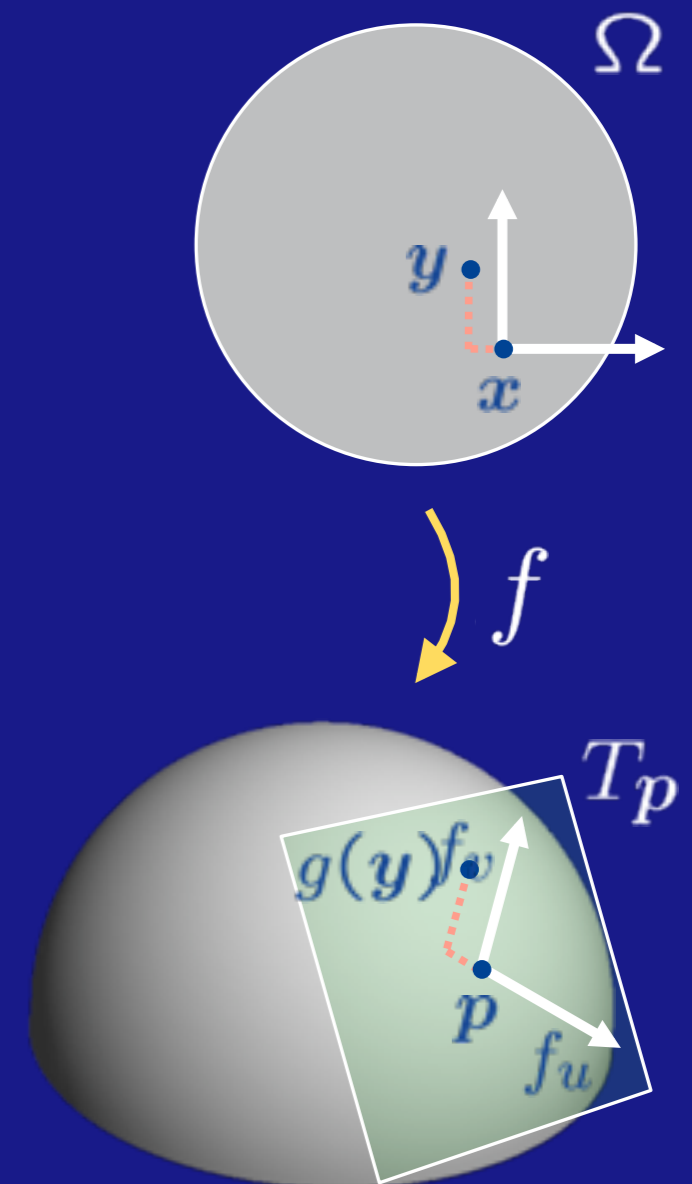
$$T_p = \{p + \alpha f_u + \beta f_v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

- **Taylor expansion** of f

$$f(y) = f(x) + J_f(y - x) + \dots$$

- **first order approximation** of f

$$g(y) = p + J_f(y - x) \in T_p$$

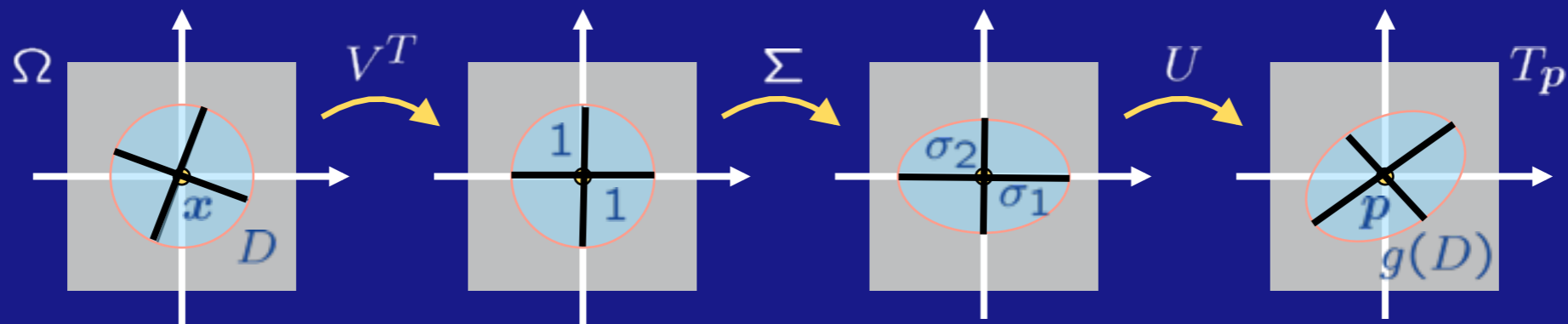


Análise da Jacobiana

- **Singular Value Decomposition** (SVD) of J_f

$$J_f = U \Sigma V^T = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T$$

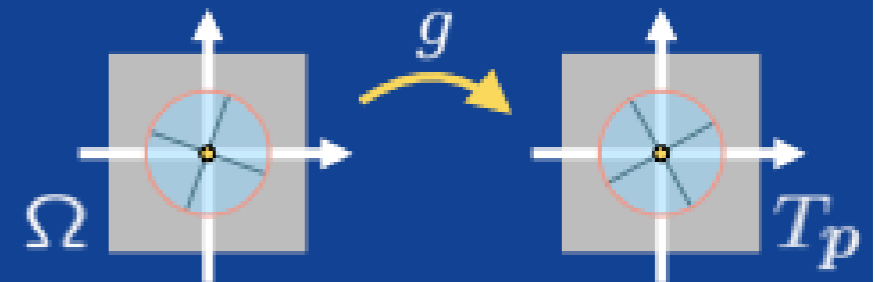
with **rotations** $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ and $V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
and **scale factors** (singular values) $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$



Noções de Distorção

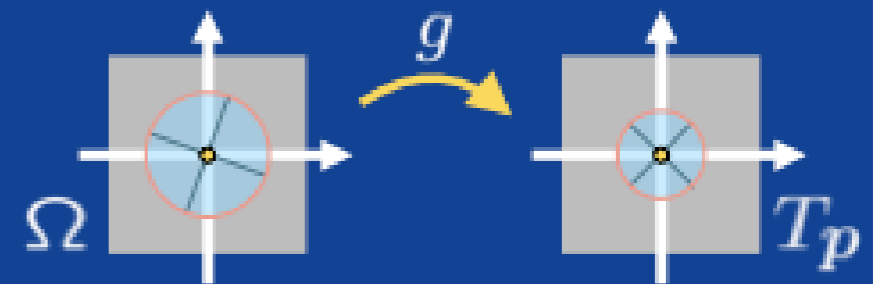
- **Isométrica** (preserva distâncias)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 1$$



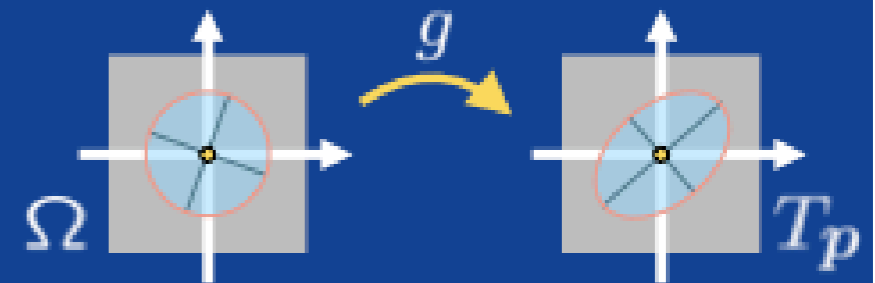
- **Conforme** (preserva ângulos)

$$\sigma_1 = \sigma_2$$



- **Equiareal** (preserva área)

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1$$



- **Isometria** \leftrightarrow **Conforme** + **Equiareal**

Calculando distorção pela I Forma Fundamental

- **first fundamental form** $\mathbf{I}_f = J_f^T J_f = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

$$E = f_u^T f_u \quad F = f_u^T f_v \quad G = f_v^T f_v$$

- **eigenvalues** of \mathbf{I}_f

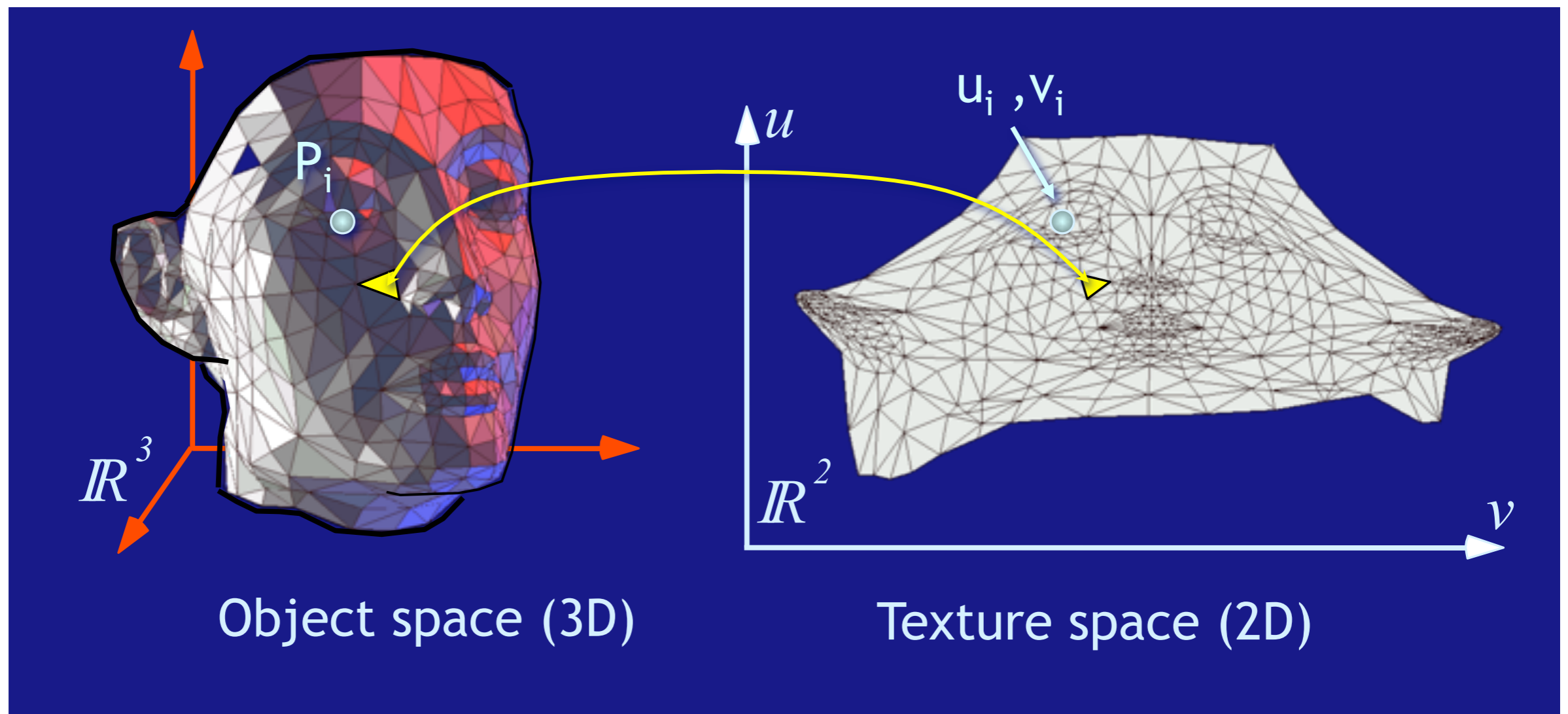
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left((E + G) \pm \sqrt{4F^2 + (E - G)^2} \right)$$

- **singular values** of J_f

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \quad \text{and} \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$$

Parametrização de Malhas

- Parametrização inversa em malhas de triângulos

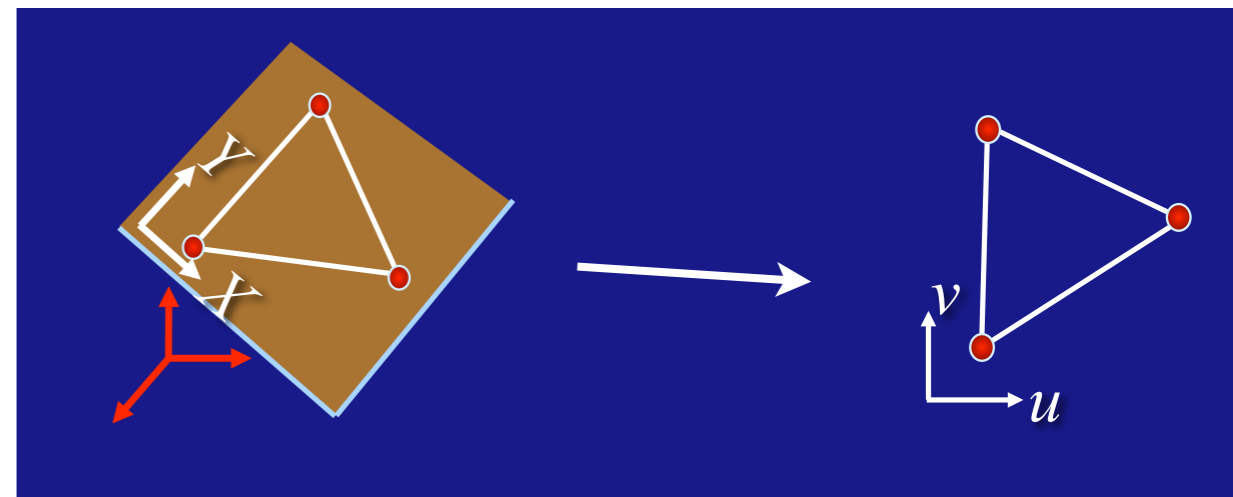


Parametrização de Malhas

- Jacobiana constante em cada triângulo
- Definir base ortonormal (X, Y) em cada triângulo

$$\begin{cases} u(X, Y) = \lambda_1 u_i + \lambda_2 u_j + \lambda_3 u_k \\ v(X, Y) = \lambda_1 v_i + \lambda_2 v_j + \lambda_3 v_k \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2|T|_{X,Y}} \begin{pmatrix} Y_j - Y_k & X_k - X_j & X_j Y_k - X_k Y_j \\ Y_k - Y_i & X_i - X_k & X_k Y_i - X_i Y_k \\ Y_i - Y_j & X_j - X_i & X_i Y_j - X_j Y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$



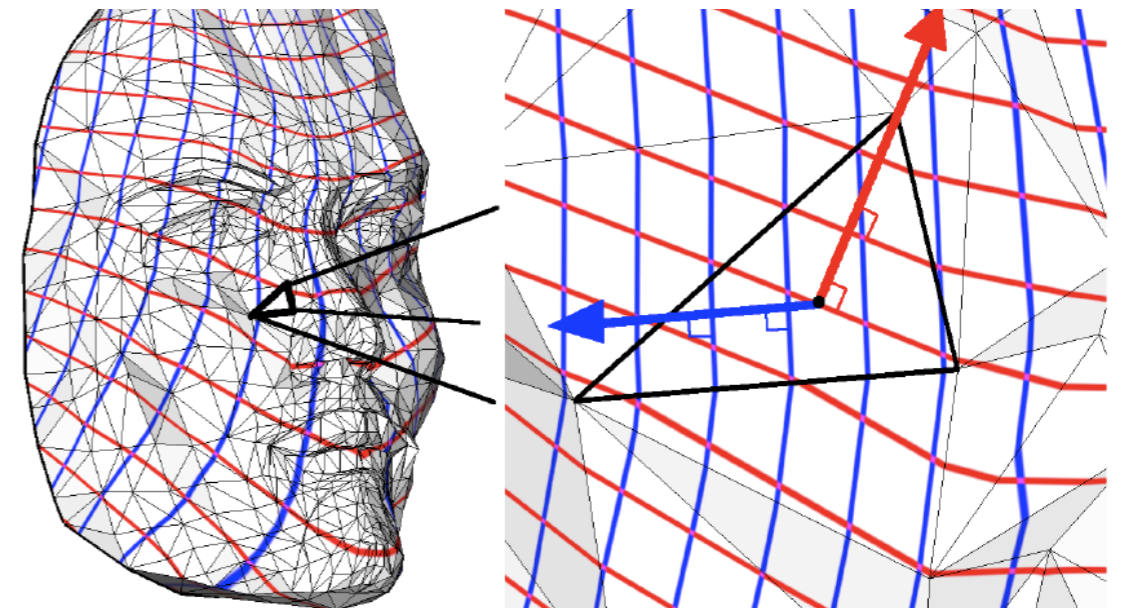
Parametrização de Malhas

- Gradiente

$$\begin{pmatrix} \partial u / \partial X \\ \partial u / \partial Y \end{pmatrix} = \mathbf{M}_T \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2|T|_{X,Y}} \begin{pmatrix} Y_j - Y_k & Y_k - Y_i & Y_i - Y_j \\ X_k - X_j & X_i - X_k & X_j - X_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{pmatrix}$$

- Jacobiana

$$\mathbf{J}_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2|T|_{x,y}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

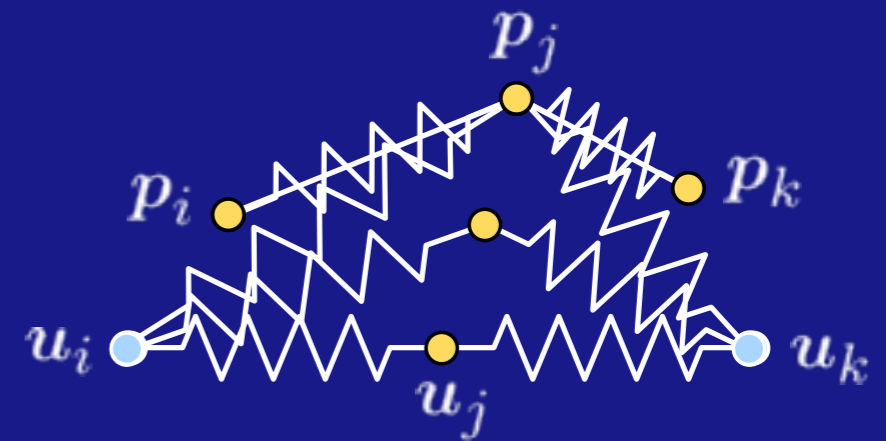


Classificação dos Métodos de Parametrização

- ◆ Bordo fixo
- ◆ Bordo livre com análise de Deformação
 - Valores singulares (eixos da elipse de anisotropia)
 - Análise complexa (aplicações conformes)
- ◆ Bordo livre com ângulos espaciais
- ◆ Métodos baseados em outros domínios paramétricos
- ◆ Parametrizações Globais

Mapeamentos baricêntricos (Tutte, 1960)

- replace **edges** by **springs**
- fix **boundary vertices**
- **relaxation** process



- **energy** of spring between p_i and p_j : $\frac{1}{2}D_{ij}s_{ij}^2$

– spring constant $D_{ij} > 0$

– spring length $s_{ij} = \|u_i - u_j\|$

- **total energy**
$$E = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \frac{1}{2}D_{ij}\|u_i - u_j\|^2$$

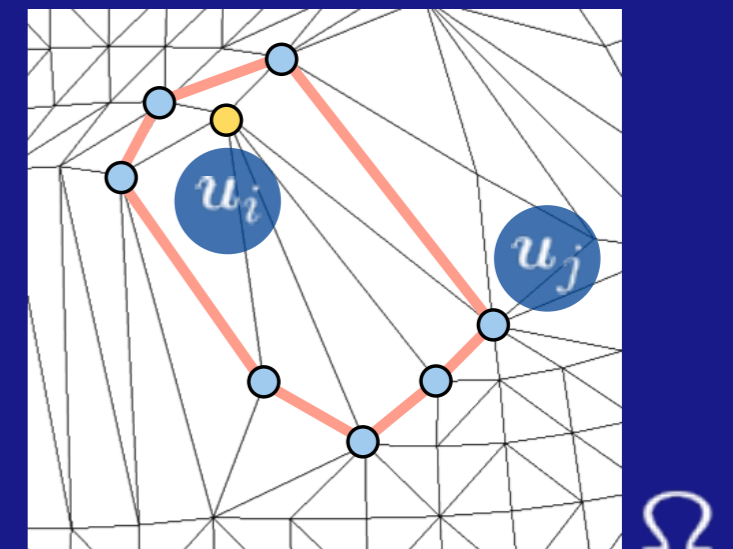
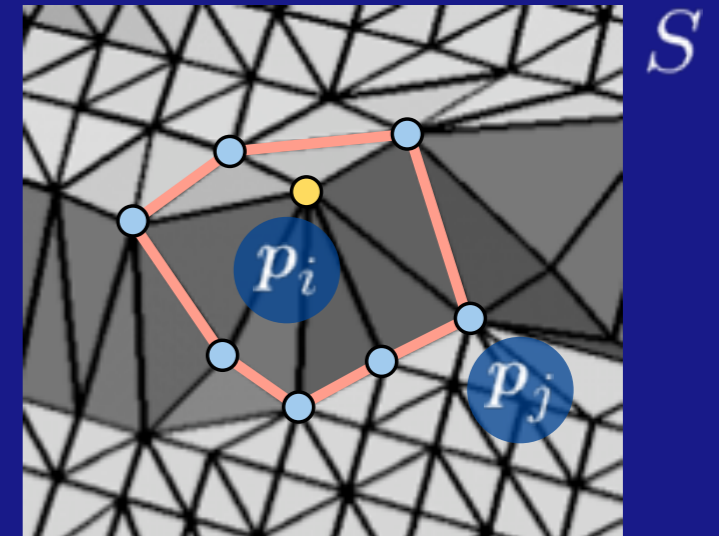
Minimização

- **interior** vertices p_1, \dots, p_n
- p_i 's **neighbours** $p_j, j \in N_i$
- **overall** spring energy

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \frac{1}{2} D_{ij} \|u_i - u_j\|^2$$

- **partial derivative**

$$\frac{\partial E}{\partial u_i} = \sum_{j \in N_i} D_{ij} (u_i - u_j)$$

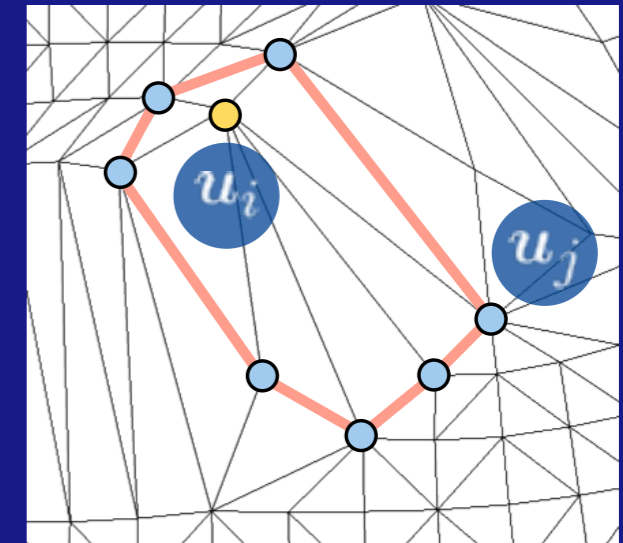


Minimização

- **minimum** of spring energy E

$$\sum_{j \in N_i} D_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_{j \in N_i} D_{ij} \mathbf{u}_j$$

for all **interior** points $\mathbf{u}_i, i = 1, \dots, n$



- \mathbf{u}_i is a **convex combination** of its neighbors \mathbf{u}_j

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} \mathbf{u}_j$$

with **weights** $\lambda_{ij} = D_{ij} / \sum_{k \in N_i} D_{ik}$

Sistema Linear

- **separation** of variables

$$\underbrace{u_i - \sum_{j \in N_i, j \leq n} \lambda_{ij} u_j}_{\text{unknown parameter points}} = \underbrace{\sum_{j \in N_i, j > n} \lambda_{ij} u_j}_{\text{fixed}} = \bar{u}_i$$

- **linear system**

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & -\lambda_{ij} \\ * & 1 & * & \vdots \\ \vdots & * & \ddots & * \\ -\lambda_{ji} & \cdots & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{pmatrix}$$

Sistema Linear

- **solve** system **twice**

$$AU = \bar{U}$$

$$AV = \bar{V}$$

for u and v coordinates of interior parameter points

- matrix A is

- sparse
- diagonally dominant
- nonsingular

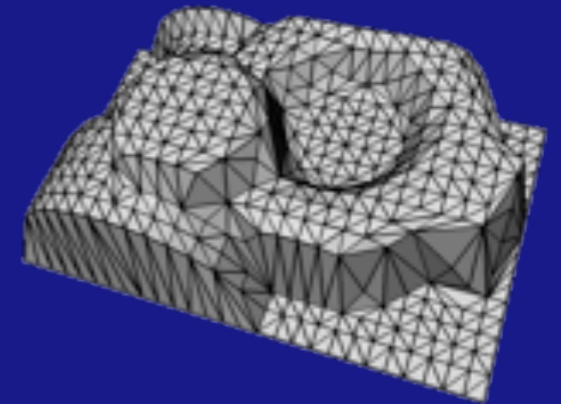
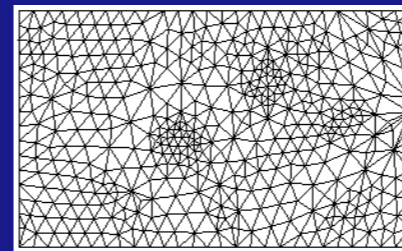
as long as all $\lambda_{ij} > 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & -\lambda_{ij} \\ * & 1 & * & \vdots \\ \vdots & * & \cdots & * \\ -\lambda_{ji} & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}$$

Escolha dos pesos

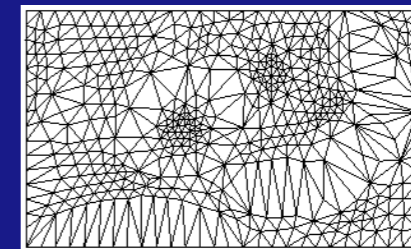
- **uniform** spring constants (Tutte, 1960)

$$- D_{ij} = 1, \quad \lambda_{ij} = \frac{1}{\#N_i}$$



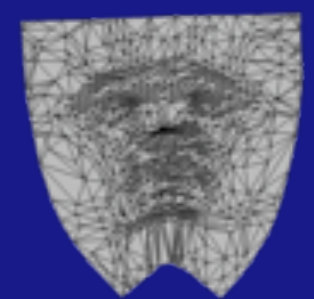
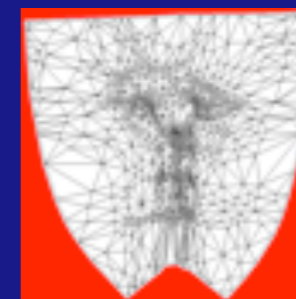
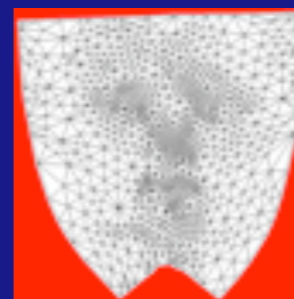
- **chordal** spring constants (Greiner & Hormann, 1997)

$$- D_{ij} = \frac{1}{\|p_i - p_j\|}, \quad \lambda_{ij} = \frac{D_{ij}}{\sum_{k \in N_i} D_{ik}}$$



- no **linear reproduction**

– planar meshes are distorted



Coordenadas baricêntricas

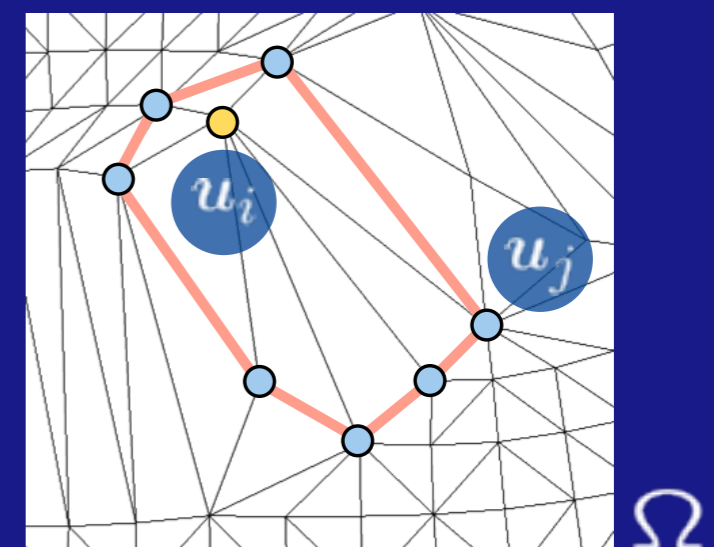
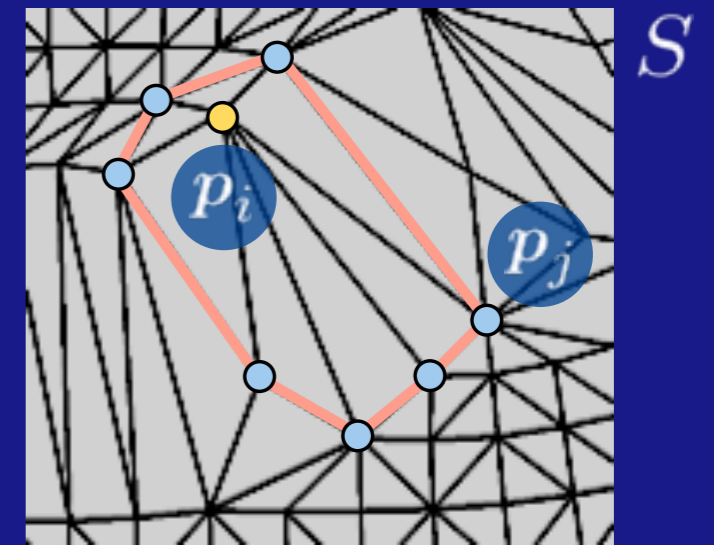
- suppose S is a **planar mesh**
- specify **weights** λ_{ij} such that

$$p_i = \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} p_j$$

- **barycentric coordinates** of p_i
- then solving

$$u_i = \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} u_j$$

reproduces S



Coordenadas baricêntricas

- **Wachspress** coordinates (1975)

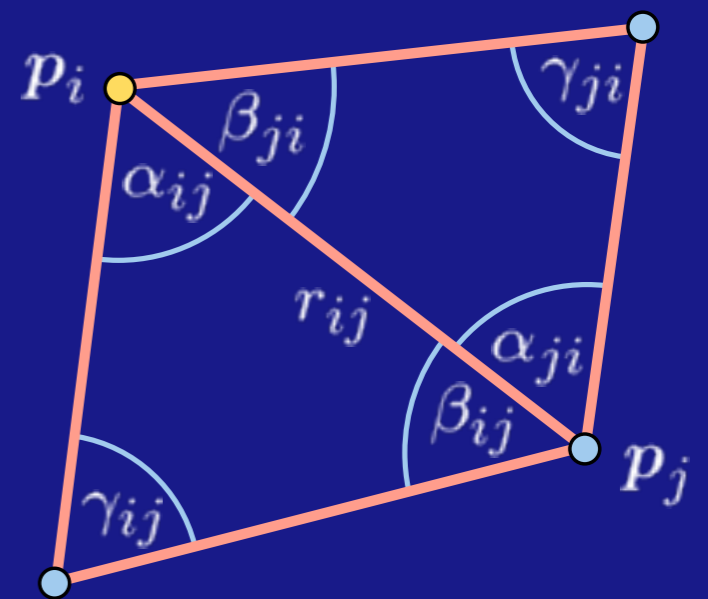
$$w_{ij} = \frac{\cot \alpha_{ji} + \cot \beta_{ij}}{r_{ij}^2}$$

- **discrete harmonic** coordinates

$$w_{ij} = \cot \gamma_{ij} + \cot \gamma_{ji}$$

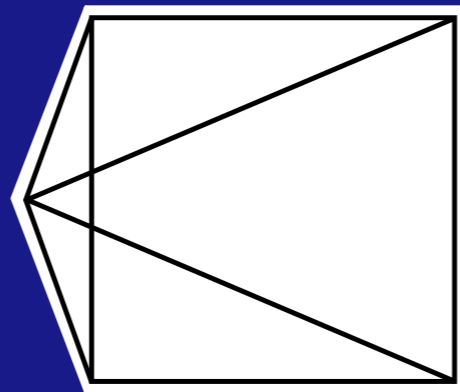
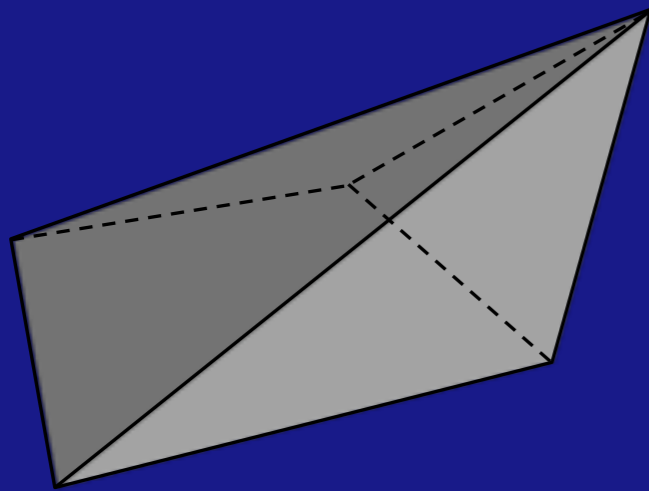
- **mean value** coordinates (Floater, 2003)

$$w_{ij} = \frac{\tan \frac{\alpha_{ij}}{2} + \tan \frac{\beta_{ji}}{2}}{r_{ij}}$$

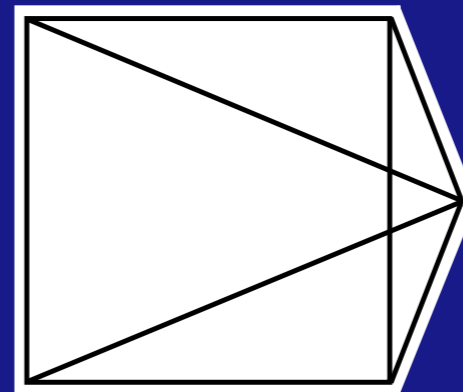


$$\lambda_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{k \in N_i} w_{ik}}$$

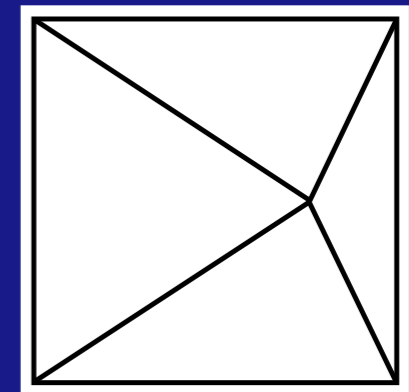
Bijetividade e estabilidade



Wachspress



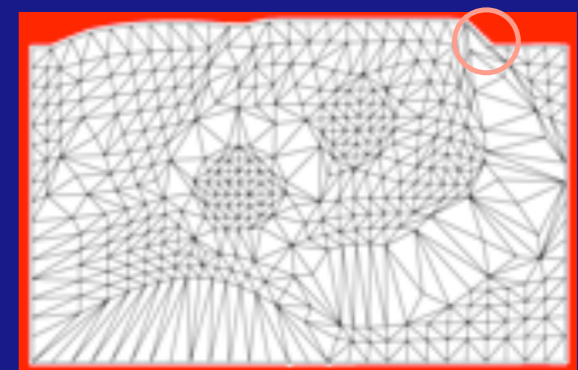
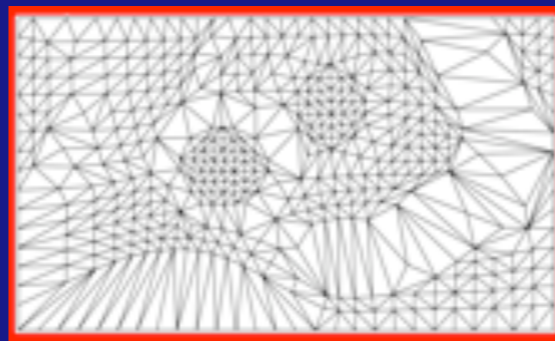
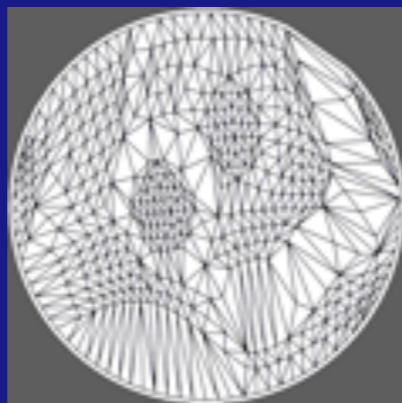
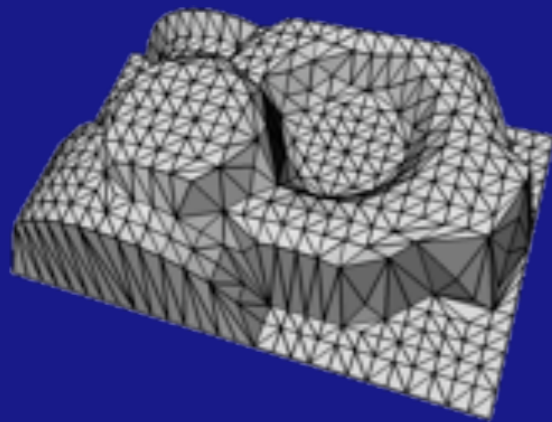
discrete harmonic



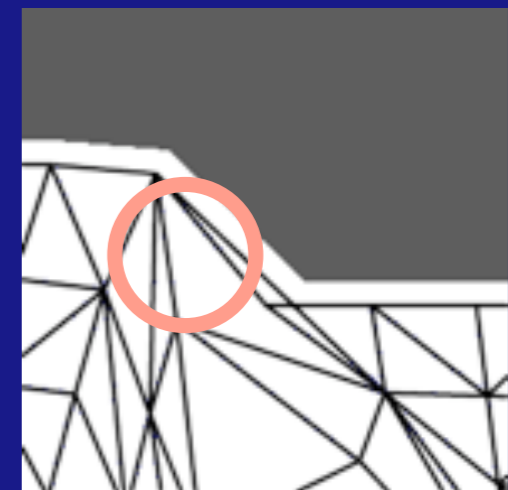
mean value

- **fold-overs** for **negative** coordinates w_{ij}
 - affine combinations $u_i = \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} u_j$, $\lambda_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{k \in N_i} w_{ik}}$
- numerically **unstable** if $\sum_{j \in N_i} w_{ij} \approx 0$
- **mean value** coordinates **guaranteed** to be **positive**

Fixando o Bordo



- **chordal** parameterization around **convex** shape
 - Circle, rectangle
 - Avoiding distortion: Augmented virtual boundary (Lee et al., 2002)
- **projection** into **least squares plane**
 - may lead to boundary fold-overs

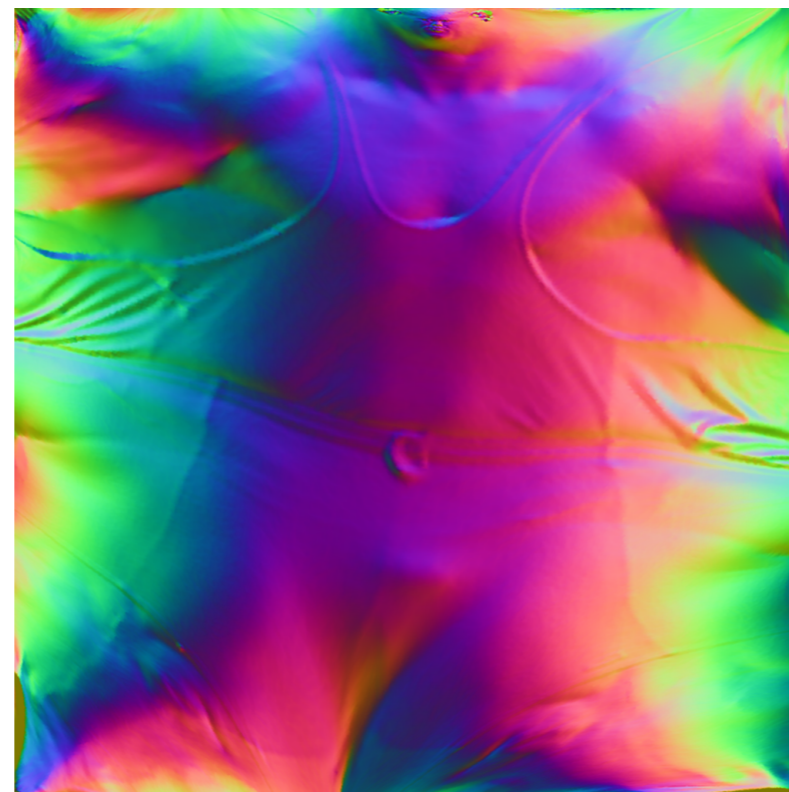
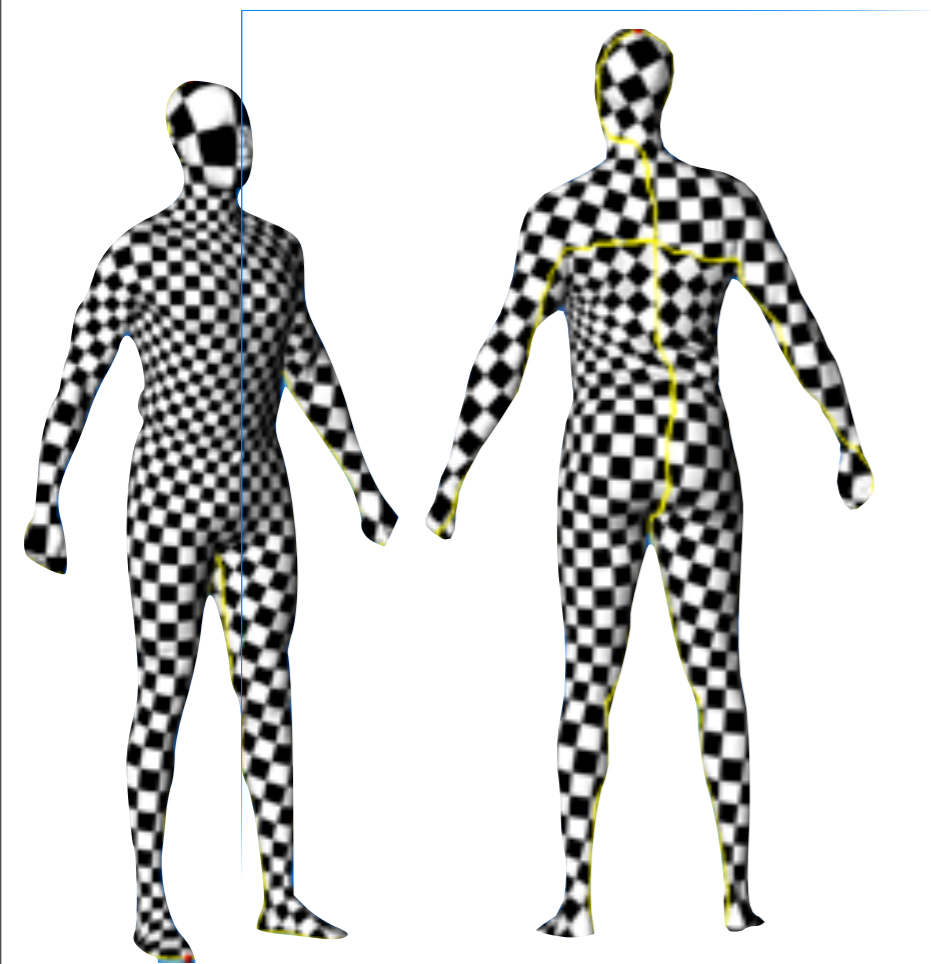


Resumo

- Eficientes: Solução linear
- Bijetividade: Uniforme e Mean-Value
- Estabilidade: Harmônica e Mean-Value
- Distorção: Depende da complexidade do bordo da superfície.

Métodos analíticos com bordo livre

- Por que usar bordo livre?



Bordo fixo: Distorção



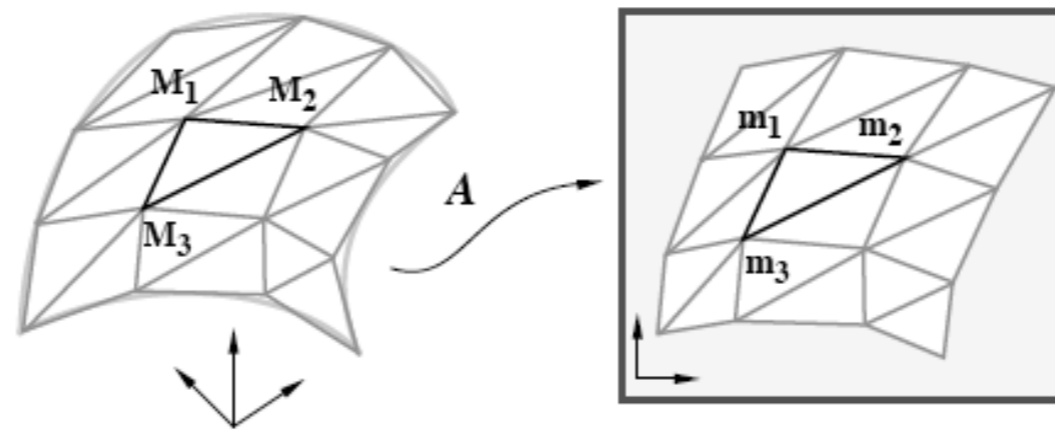
Bordo livre: Menos distorção

Métodos Analíticos

- Princípios gerais
 1. Definir uma energia F em função de $J, I, \lambda_1, \lambda_2$
 2. Escrever F em função das incógnitas u_i e v_i .
 3. Encontrar os u_i e v_i que minimizam F .

Green-Lagrange Deformation Tensor

- Intuição: Uma isometria tem tensor métrico identidade: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
- Objetivo: Minimizar $\|\mathbf{I} - \mathbf{Id}\|_F^2 = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2$
- Em superfícies trianguladas:



$$E_l = 2 \sum_{m_k \text{ adjacent to } m_i} \frac{(\|m_i - m_k\|^2 - \|M_i - M_k\|^2)^2}{\|M_i - M_k\|^2}$$

MIPS (Mostly Isometric Parameterization of Surfaces) [Hormann et. al]

- Princípios:
 - Minimizar deformação
 - Invariância por similaridades (rotação e escala)
 - Punir triângulos degenerados
- Objetivo: Minimizar σ_1/σ_2

MIPS - Simplificação

2-norma das matrizes A ,
 A^{-1} dos valores singulares:

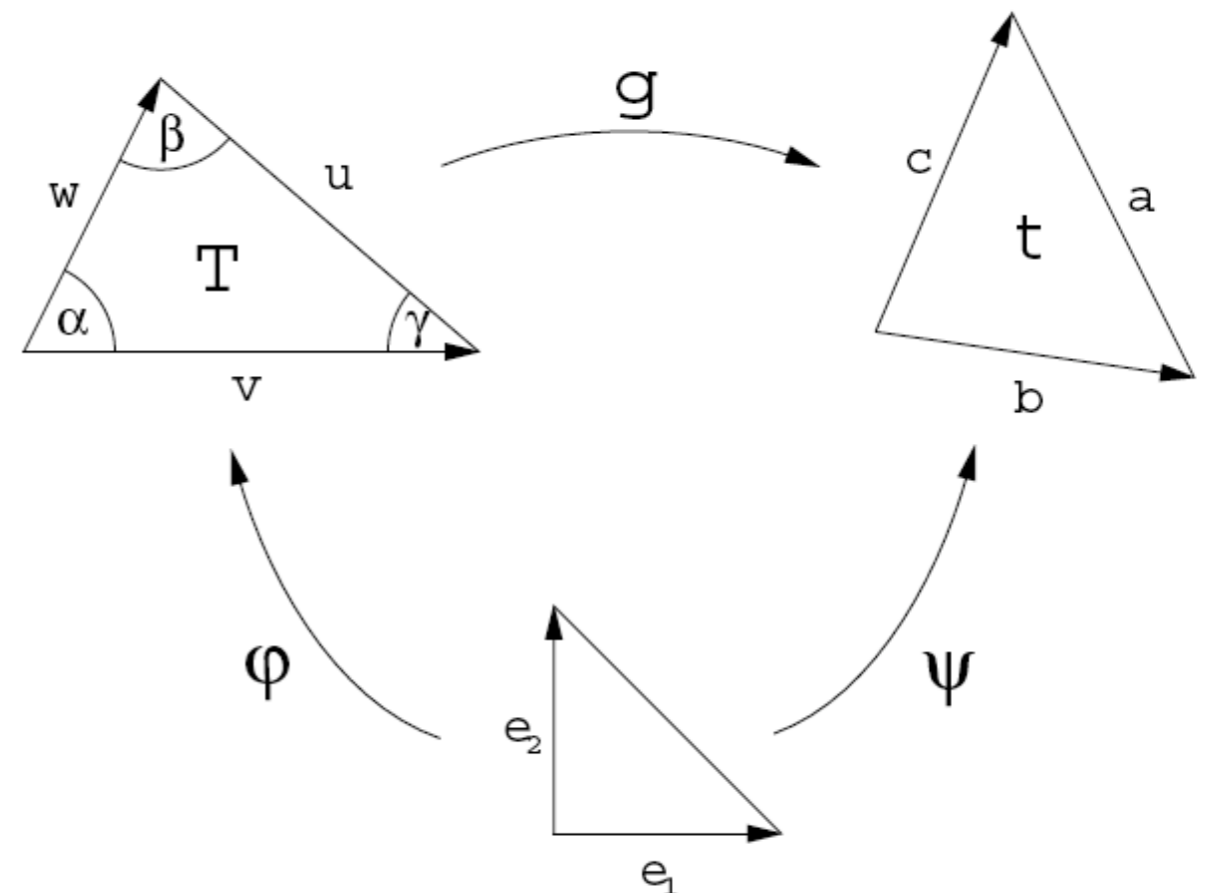
$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Tome a norma de
Frobenius:

$$\begin{aligned}\kappa_F(A) &= \|A\|_F \|A^{-1}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2} \\ &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \kappa_2(A) + \frac{1}{\kappa_2(A)} \\ &= \frac{\text{trace}(A^t A)}{\det A}.\end{aligned}$$

MIPS - Discretização

$$\begin{aligned} \kappa_F(g) := \kappa_F(A) &= \frac{\text{trace}(A^t A)}{\det A} = \frac{\text{trace}(\partial g^t \partial g)}{\det \partial \psi \det \partial \varphi^{-1}} = \frac{4E_D(g)}{\det \partial \psi} \\ &= \frac{\cot \alpha |a|^2 + \cot \beta |b|^2 + \cot \gamma |c|^2}{\det \partial \psi}. \end{aligned}$$



Stretch Minimization

[Sander et. al]

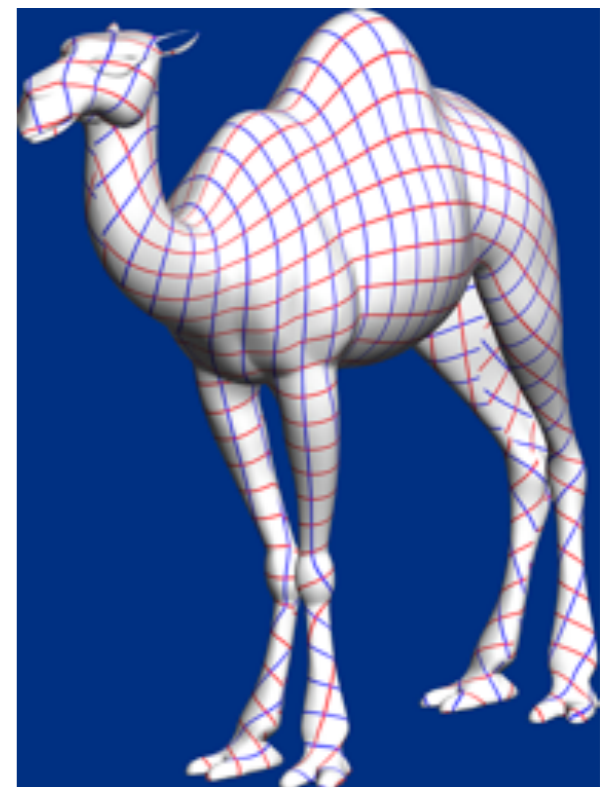
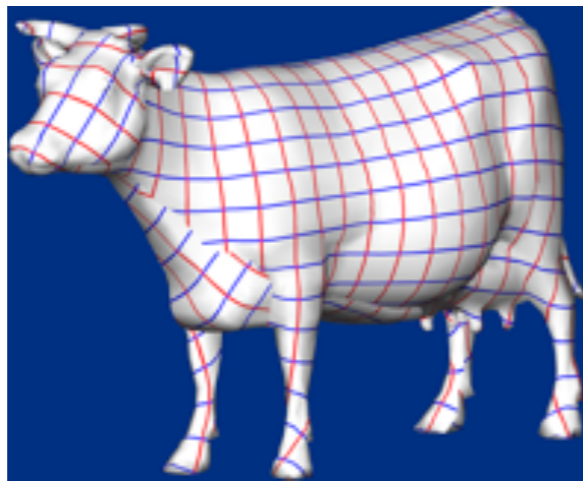
- Motivação: minimizar a deformação de um sinal (i.e. textura) representado no espaço paramétrico quando aplicada uma parametrização.
- Deformação direcional: *stretch*
- *Stretch* médio e máximo:

$$L_2(T) = \sqrt{((1/\sigma_1)^2 + (1/\sigma_2)^2) / 2}$$
$$L_\infty(T) = 1/\sigma_1$$

Stretch Minimization

$$L_2(S) = \sqrt{\frac{\sum_T |T| L_2(T)}{\sum_T |T|}}$$

$$L_\infty(S) = \max_T L_\infty(T)$$



Combined Energy

- Combinar minimização de deformações de área e ângulo

$$E_{combined} = E_{angle} \times (E_{area})^\theta$$

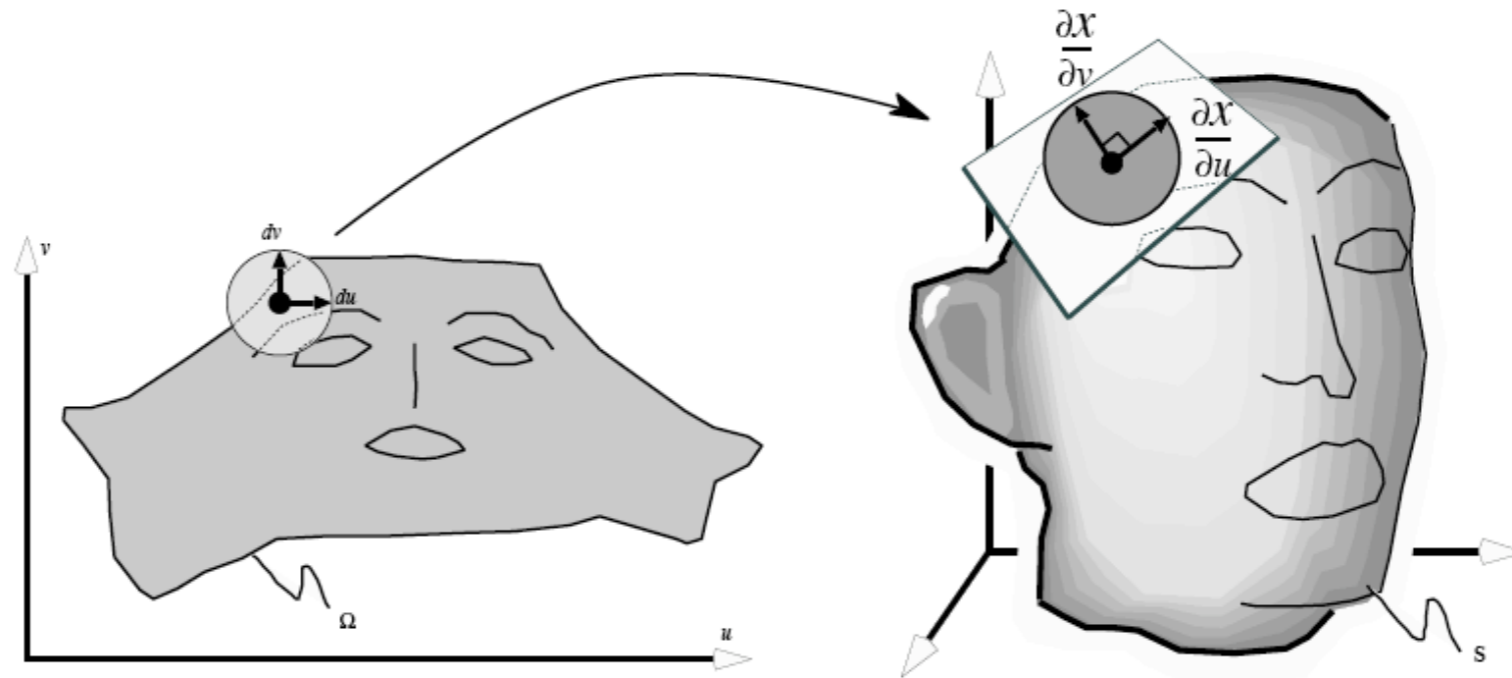
with :

$$E_{area} = \sigma'_1 \sigma'_2 + \frac{1}{\sigma'_1 \sigma'_2} = \det(\mathbf{J}'_T) + \frac{1}{\det(\mathbf{J}'_T)}$$

$$E_{angle} = \frac{\sigma'_1}{\sigma'_2} + \frac{\sigma'_2}{\sigma'_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = E_{MIPS}$$

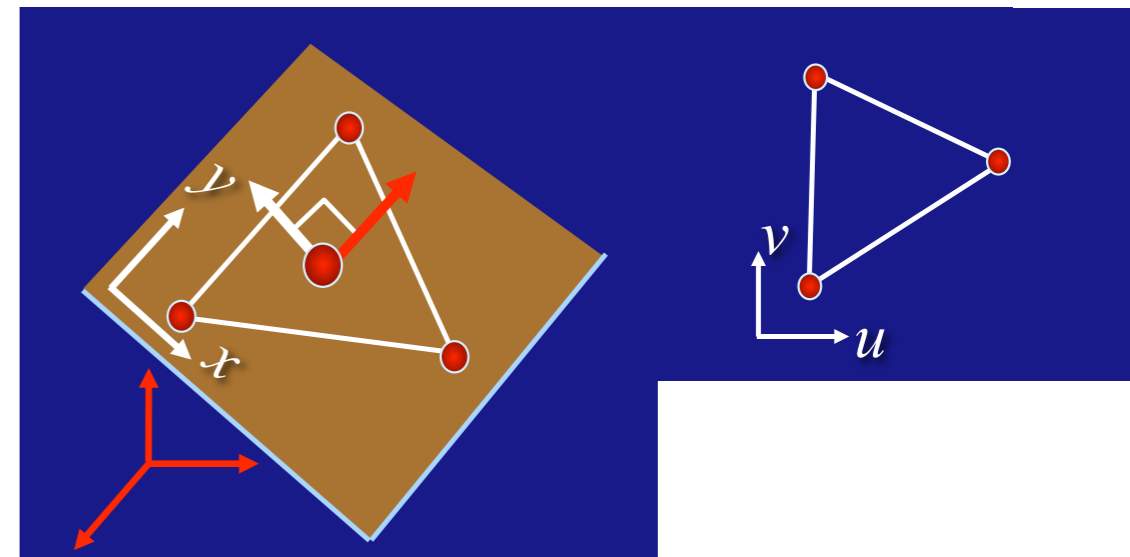
Métodos Conformes

- Elipse de anisotropia é um círculo



- Matriz Jacobiana é uma rotação e uma escala (similaridade)

$$\nabla v = \text{rot}_{90}(\nabla u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u$$



LSCM (Least Squares Conformal Maps) [Levy et al. 2002]

- Superfícies em geral não admitem parametrização conforme

$$\nabla v \neq \text{rot}_{90}(\nabla u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u$$

- Minimizar energia conforme

Minimize $\sum_T \left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \right\|^2$ Fix two vertices to determine rot,transl,scaling

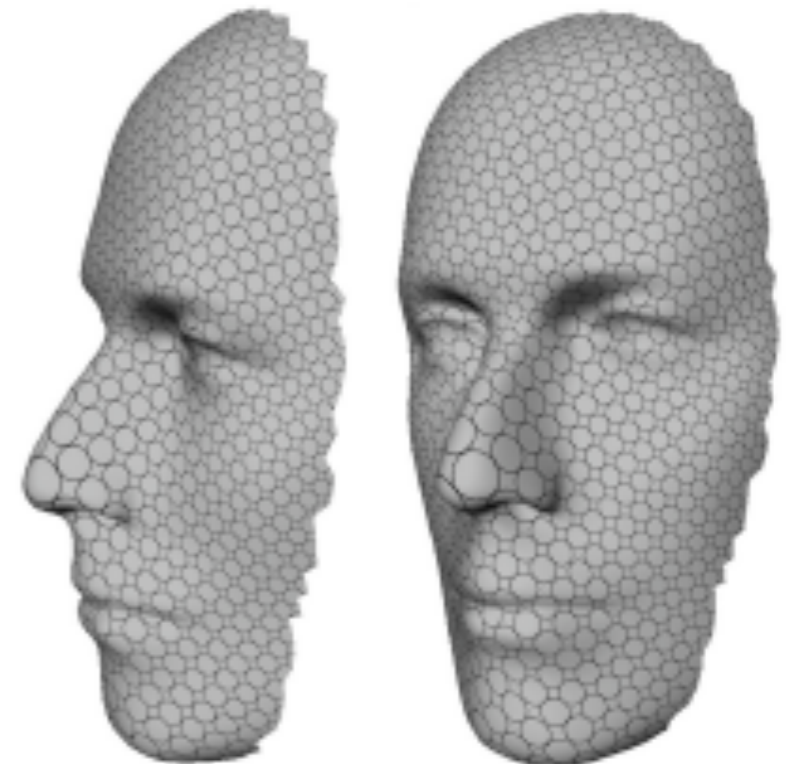
DNCP [Desbrun et al. 2002]

- Encontrar uma aplicação conforme complexa onde valem as equações de Cauchy-Riemann:

$$X = x + iy$$
$$U(X) = u(X) + iv(X)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$



Laplaciano:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$



$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

- Solução: calcular funções harmônicas u e v com bordo livre

Relação entre Métodos Conformes

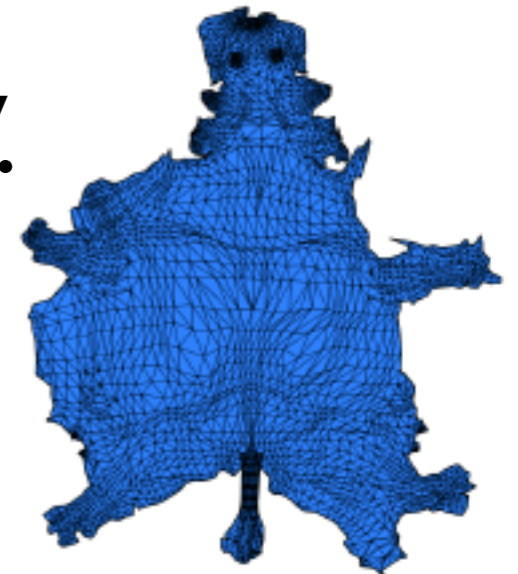
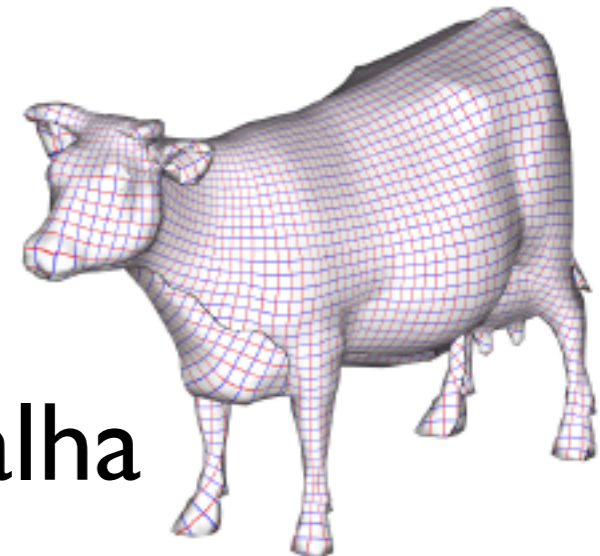
$$\underbrace{\int_S \det(\mathbf{J}) ds}_{\text{area of the surface}} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_S \|f_u\|^2 + \|f_v\|^2 ds}_{\text{Dirichlet's energy}} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_S \|f_v - \text{rot}_{90}(f_u X)\|^2}_{\text{conformal energy}}$$

↑
~
↑

Desbrun
LSCM

Métodos indiretos

- Métodos anteriores calculam diretamente coordenadas UV
- Alternativa:
 1. Definir parâmetros que definem a malha 2D de maneira única;
 2. Converter solução encontrada em UV.

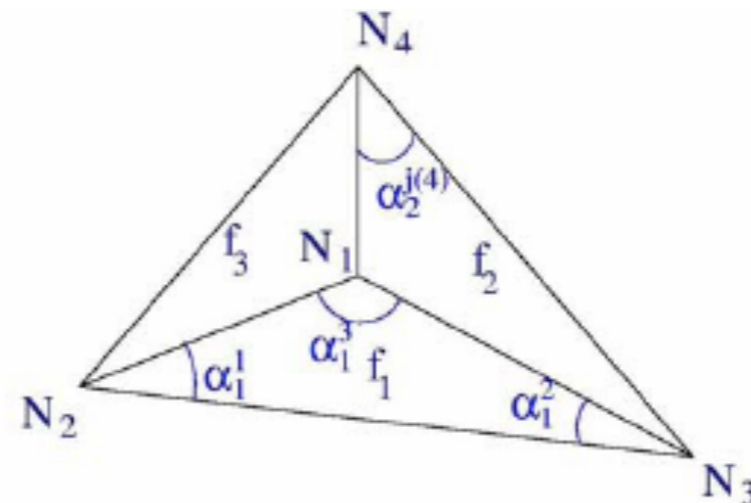
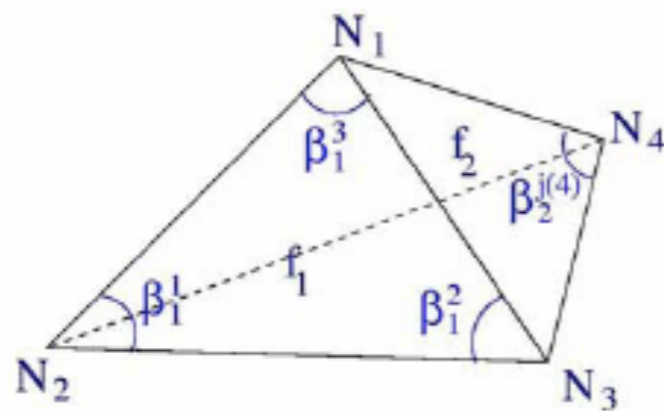


Ângulos espaciais: Angle Based Flattening (ABF, ABF++)

[Sheffer & Sturler 2000]

- Uma malha 2D é unicamente definida por seus ângulos a menos de translações e rotações
- Otimização:
 - Distorção angular em função dos ângulos:

$$\sum_{t \in T, j=1..3} w_j^t (\alpha_j^t - \beta_j^t)^2, w_j^t = \frac{1}{\beta_j^{t^2}}$$



ABF

- Condições para validade da triangulação plana:

– Triangle validity:

$$\forall t \in T, \quad \alpha_1^t + \alpha_2^t + \alpha_3^t - \pi = 0;$$

– Planarity:

$$\forall v \in V_{int}, \quad \sum_{(t,k) \in v^*} \alpha_k^t - 2\pi = 0$$

– Reconstruction

$$\forall v \in V_{int}, \quad \prod_{(t,k) \in v^*} \sin \alpha_{k \oplus 1}^t - \prod_{(t,k) \in v^*} \sin \alpha_{k \ominus 1}^t = 0$$

– Positivity $\alpha_j^t > 0$

- Solução não linear: Multiplicadores de Lagrange (Método de Newton)

ABF

- Localmente bijetiva
- Lento
- Instabilidade na conversão ângulos \Rightarrow UV

ABF++ [Sheffer et al. 2005]

ABF

- Solver:
 - Newton
 - At each step solve

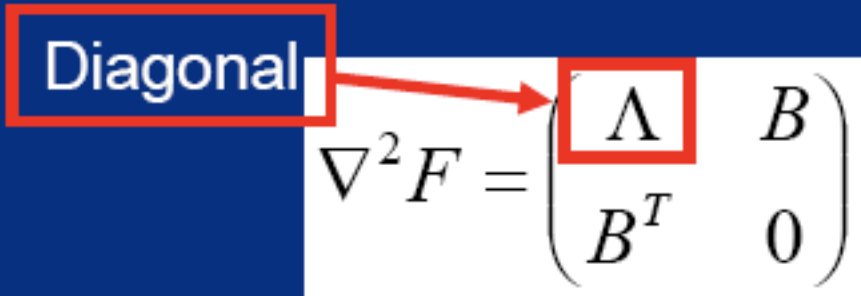
$$\nabla^2 F \delta = -\nabla F, \nabla^2 F = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

- Conversion
 - Triangle unfolding
 - accumulates error

ABF++

- Solver:
 - Gauss-Newton
 - Allows drastic system simplification

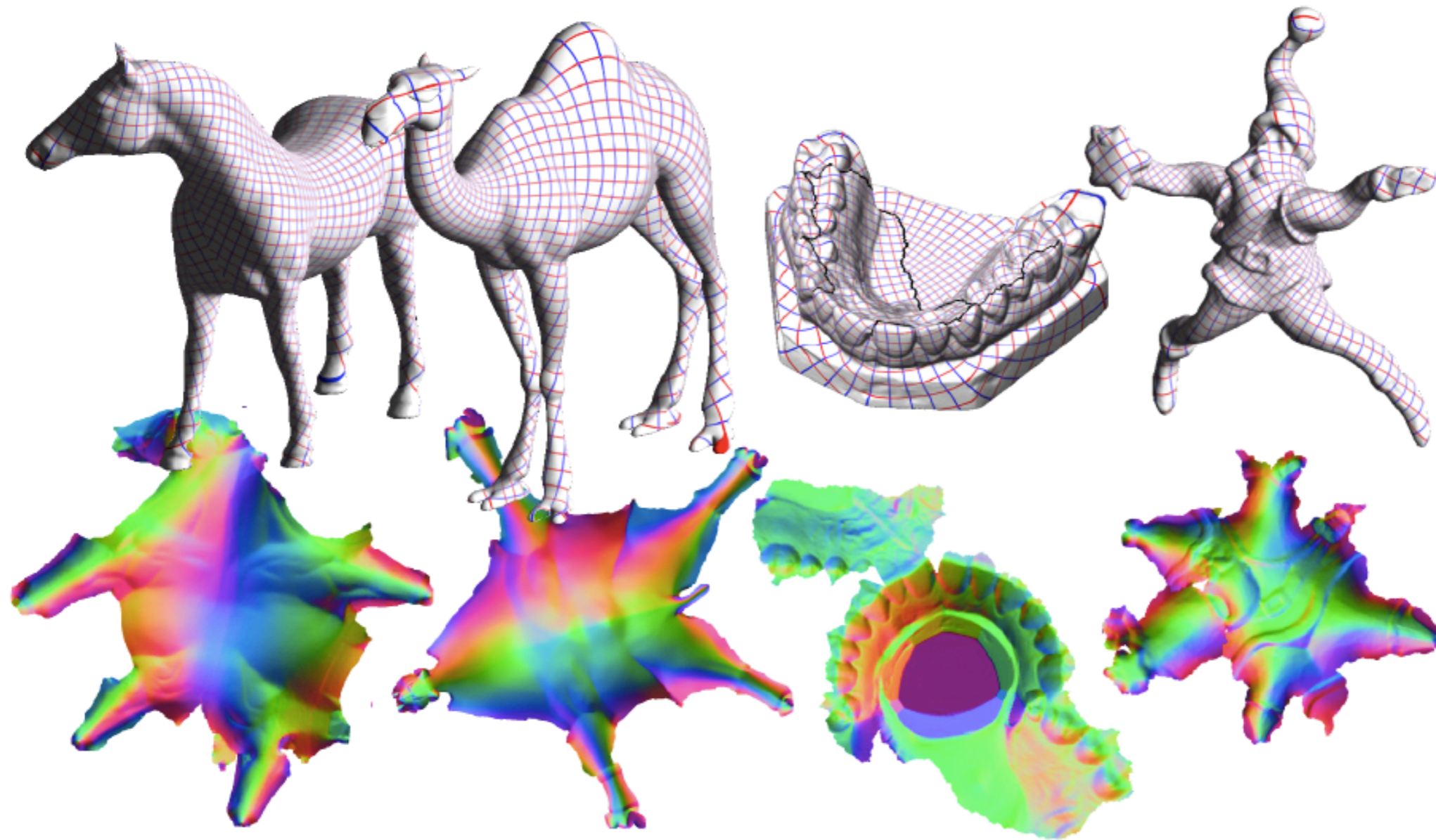
Diagonal


$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} \Lambda & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

- Conversion:
 - LSCM (α_j^t as target angles)
 - allow less accurate solution

- [Zayer et al. 2003]: Mais restrições para garantir bordo convexo (bijeção global)

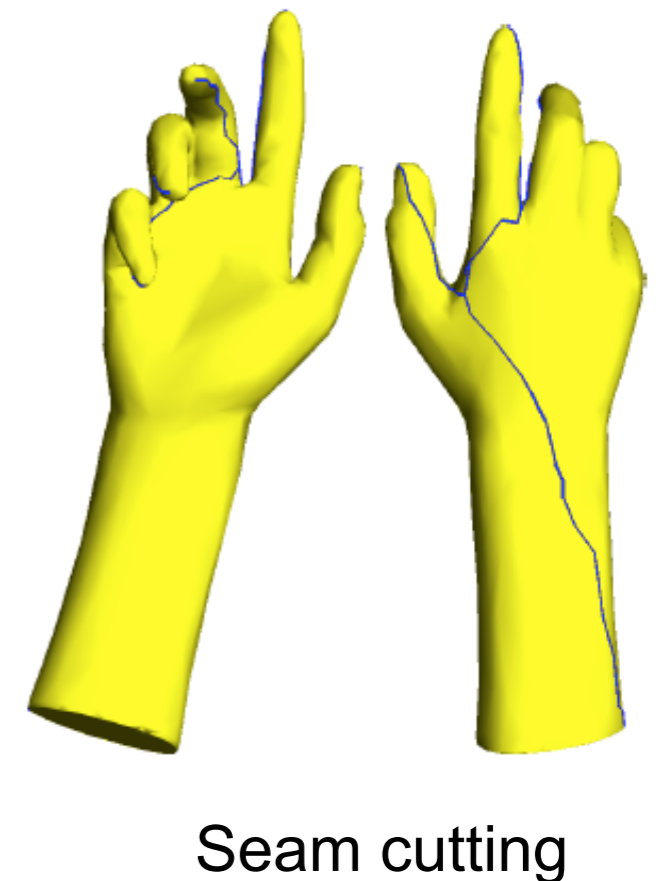
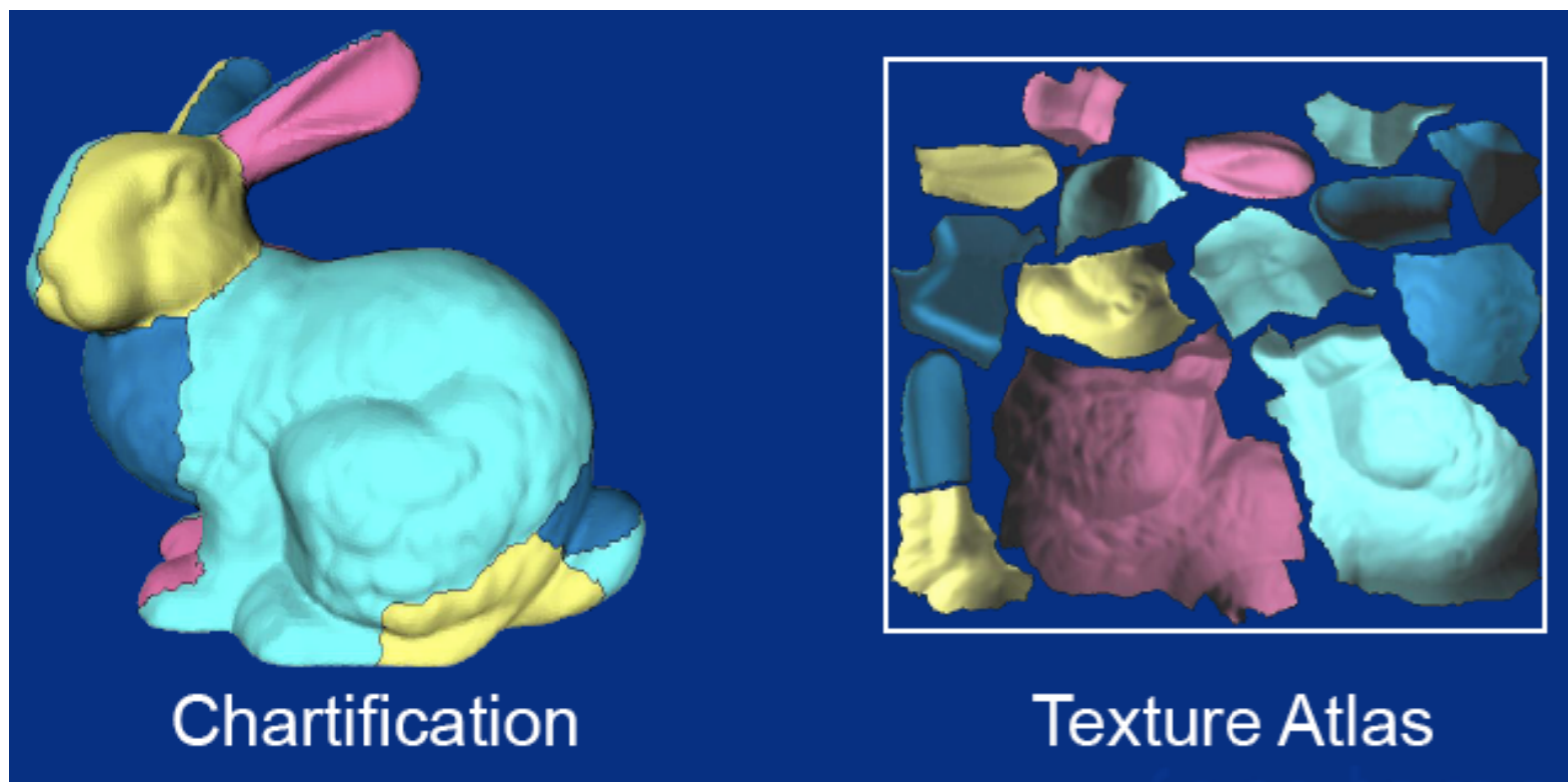
ABF / ABF++: Resultados



	ABF++	ABF	LSCM
Bull (35K Δ)	11	106	3
Camel (80K Δ)	55	485	8
Horse (100K Δ)	85	3450	15
Isis (400K Δ)	335	NA	58

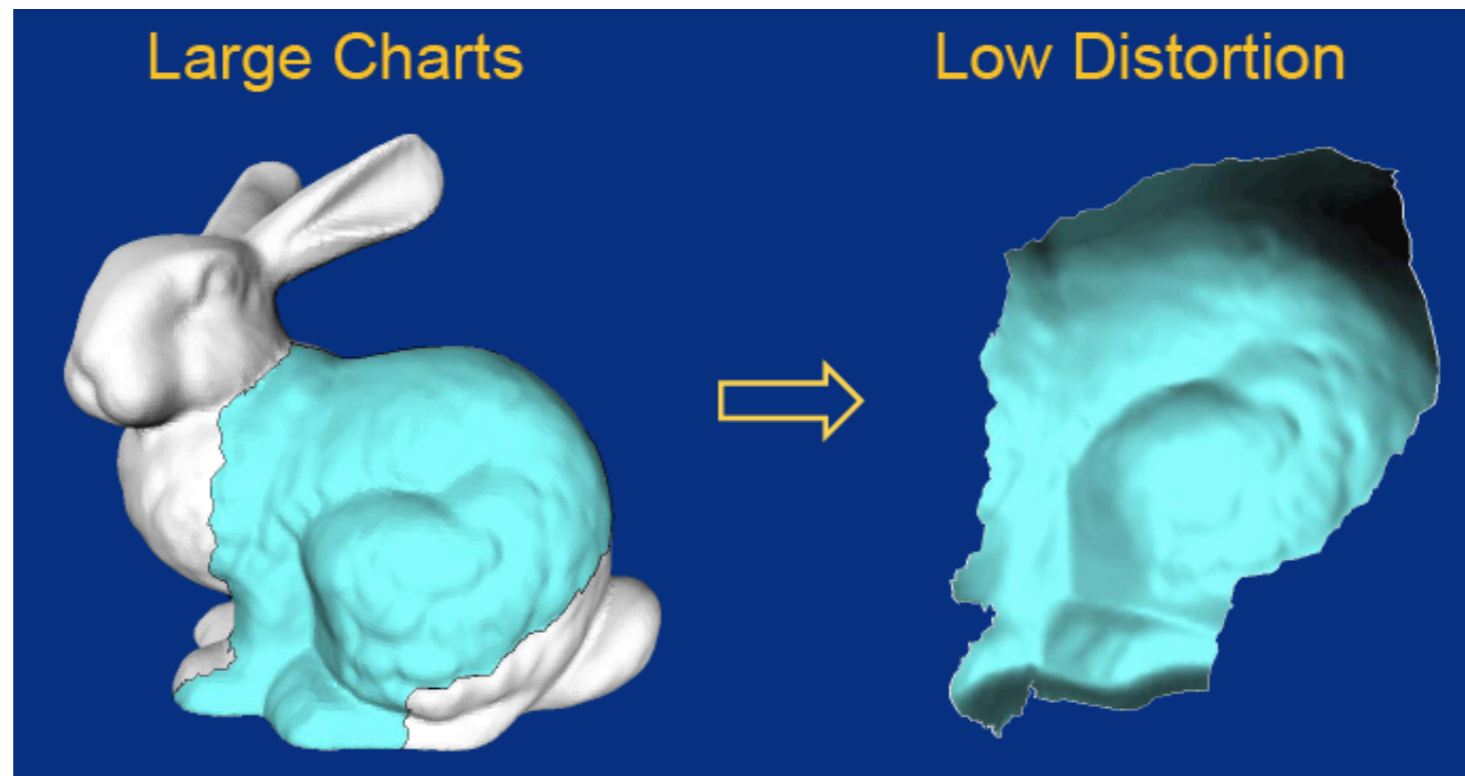
Segmentação

- Parametrização plana: Superfícies com topologia de disco
- Segmentação necessária para superfícies fechadas ou com gênero mais alto
- Recomendada para reduzir distorção em superfícies complexas



Segmentação

- Objetivos:
 - Simplificar topologia
 - Baixar distorção
 - Poucos segmentos
 - Borda pequena



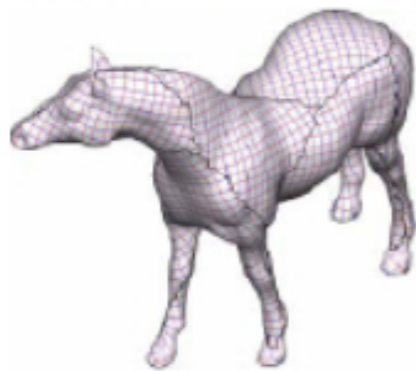
Segmentação com geração de atlas



- [Maillot et al., 1993; Garland et al., 2001; Sander et al., 2003; Cohen-Steiner et al., 2004]



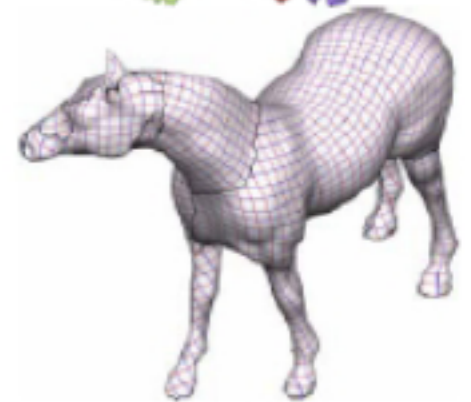
- Segmentação em planos
- Chart growing / reseeding



Sander et al., 2003

- [Lévy et al., 2002; Zhou et al., 2004; Julius et al., 2005]

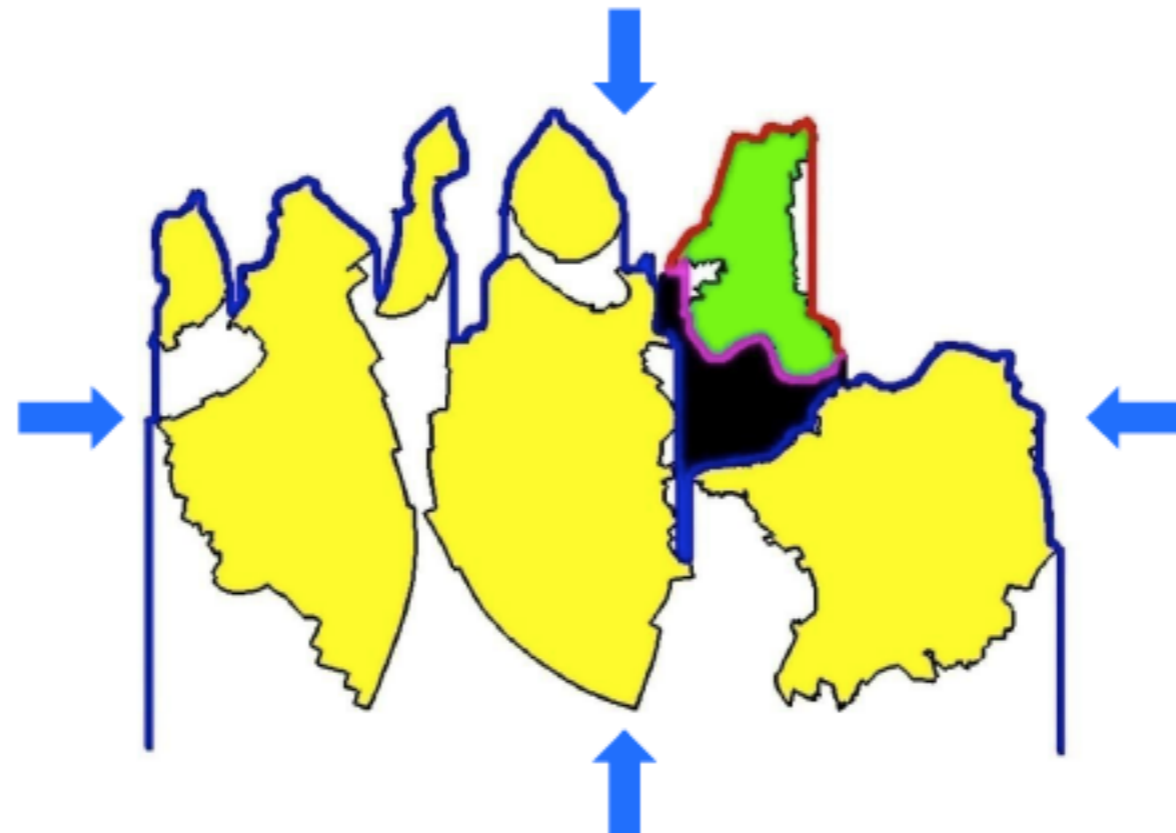
- Restrição a planos é muito forte
- Segmentação em superfícies regradadas



Zhou et al., 2004

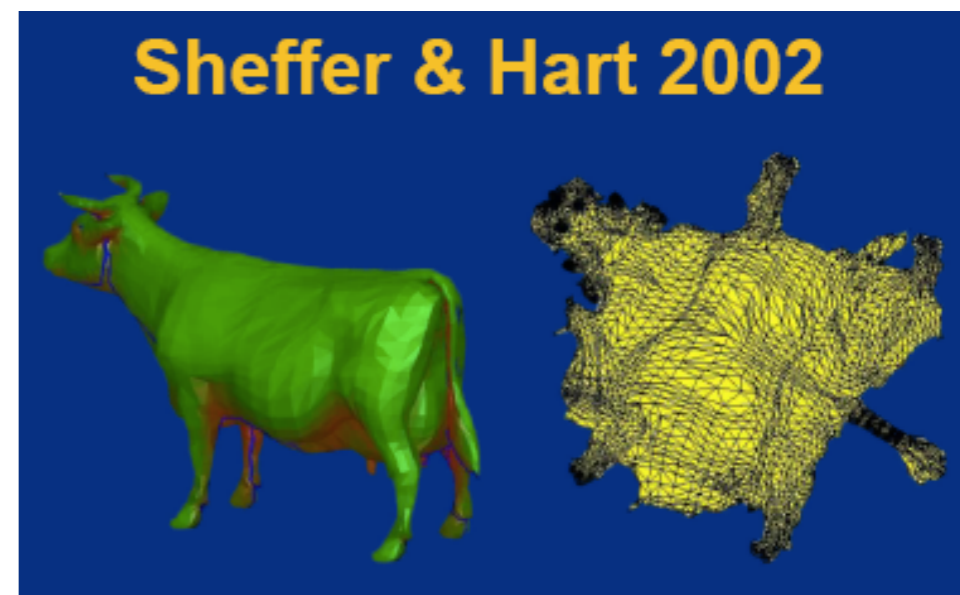
Atlas Packing

- Unir todas as parametrizações em um único domínio
- Domínio deve ser o mais compacto possível (NP-hard)
- Tetris algorithm [Lévy, 2002]: Introduzir um por um com o melhor encaixe possível na frente.



Segmentação em um único chart: *Seam Cutting*

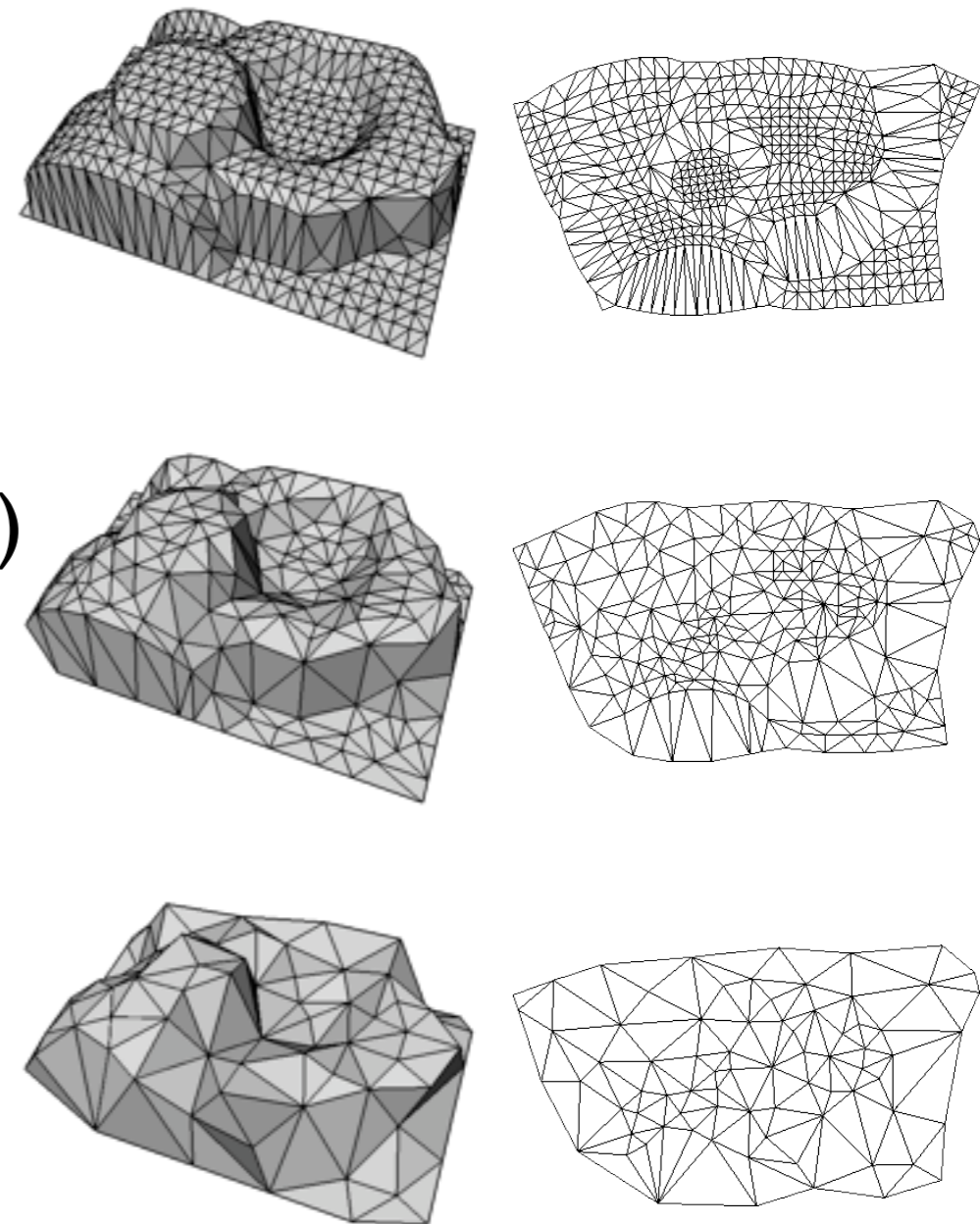
- Objetivo:
 - Promover cortes menores sem dividir em segmentos
 - Reduzir o gênero
- [Gu et al. 2002]: Menor corte do ponto de maior distorção até a borda
- [Sheffer & Hart 2002]: Seamster algorithm: define uma métrica de visibilidade e corta pela parte menos visível da superfície.



Gu et
al. 2002

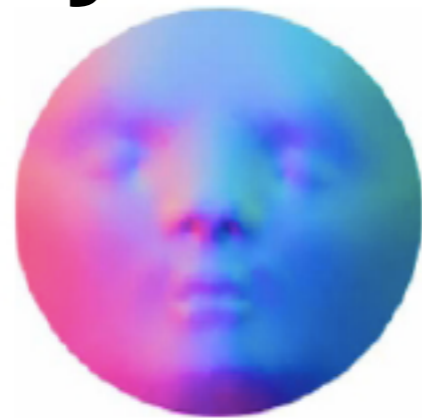
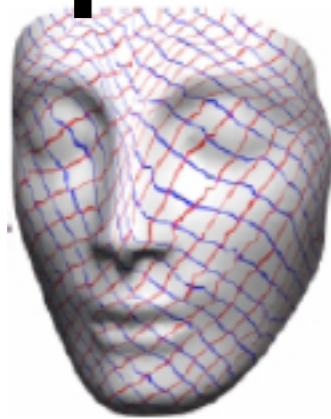
Comparação dos Métodos Planos

- Objetivos:
 - Minimizar distorção (isometrias)
 - Otimização global (bordo natural)
 - Bijeção (triângulos sem sobreposição)
 - Performance (métodos lineares)

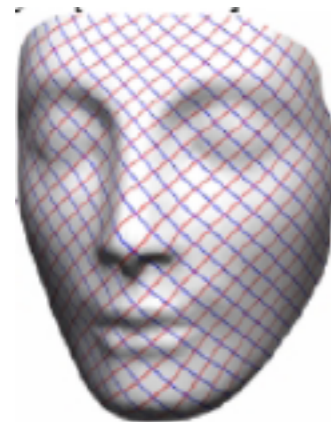


Comparação dos Métodos Planos

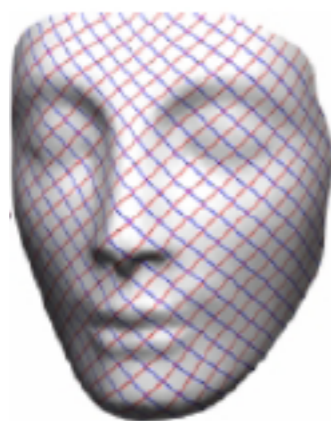
Lineares



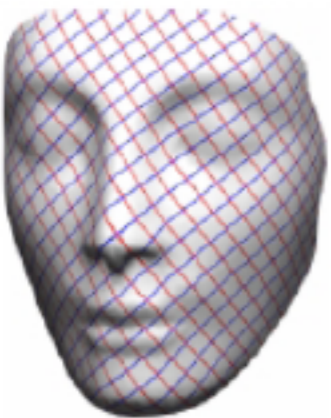
Bordo fixo com peso uniforme



Bordo fixo com coordenadas harmônicas discretas



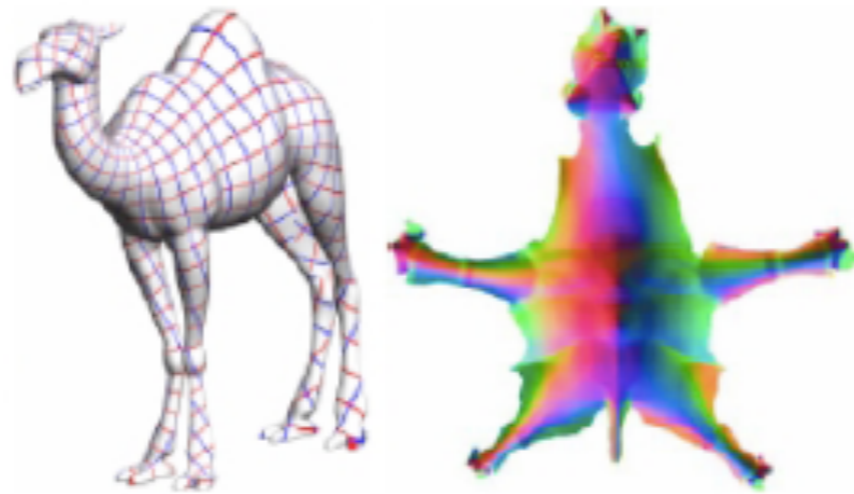
Bordo fixo com valor médio



LSCM (Método conforme)

Comparação dos Métodos Planos

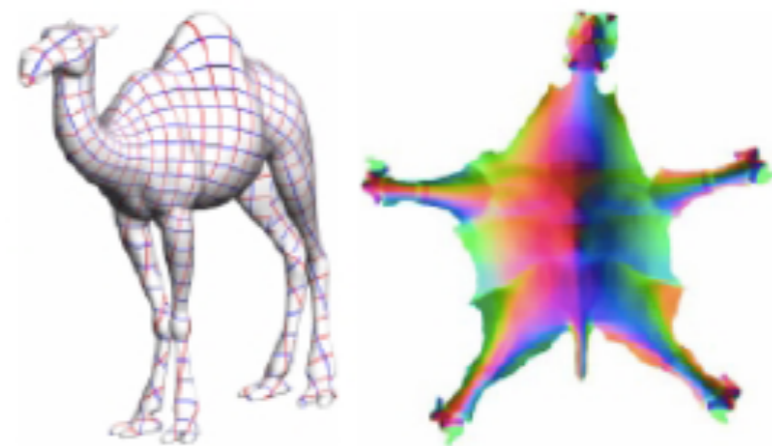
Não-Lineares



MIPS



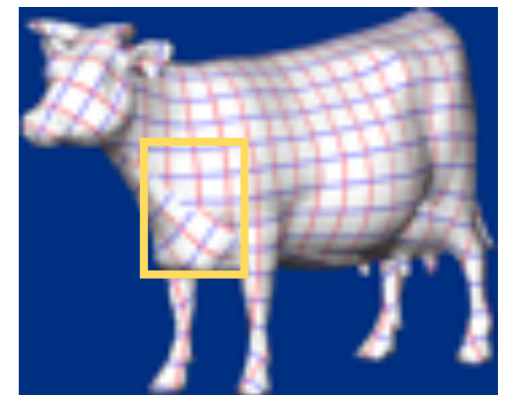
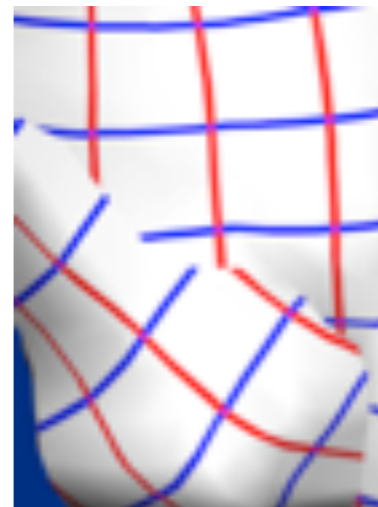
Stretch



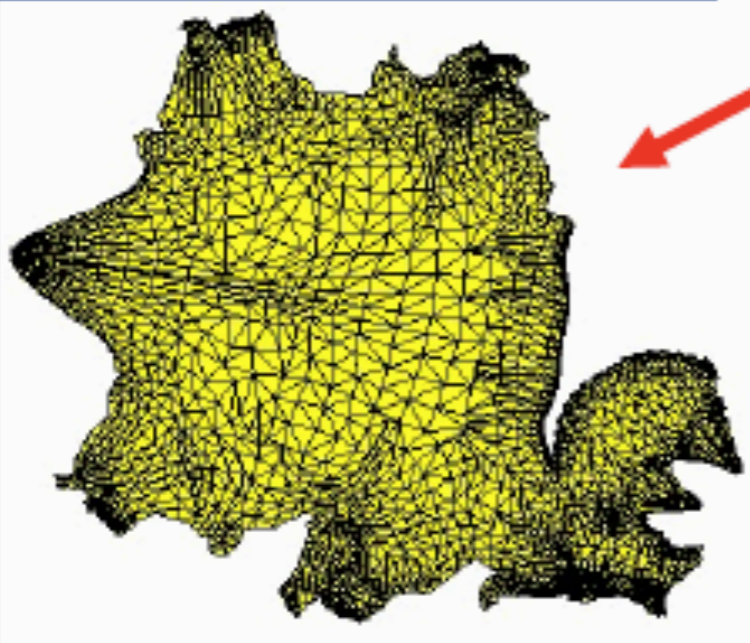
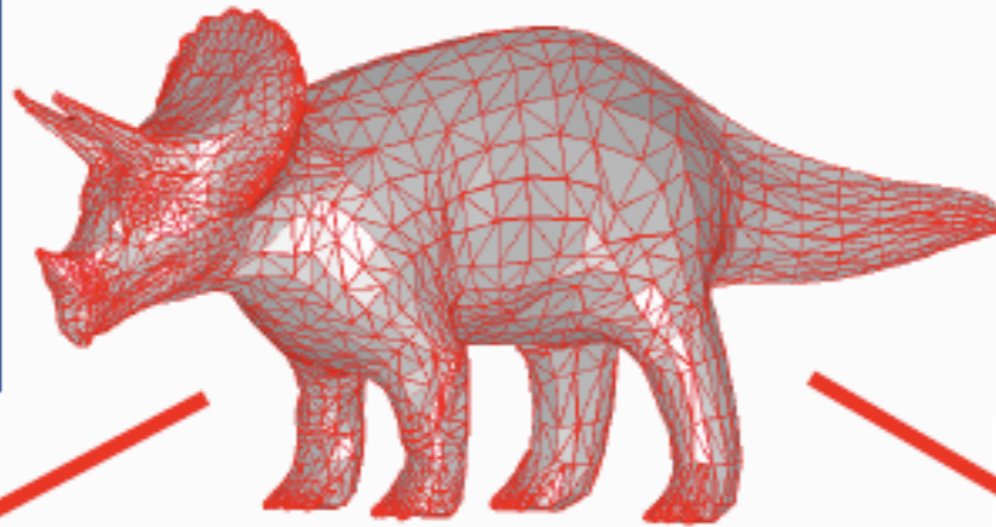
ABF++

Sinopse dos métodos planares

- Métodos lineares
 - Valor Médio (bordo fixo) e conformes (bordo livre)
- Métodos não-lineares
 - Possibilitam menos distorção em formas complexas
 - ABF++ e stretch
- Problema em comum:
 - Segmentação: descontinuidades nos bordos dos segmentos

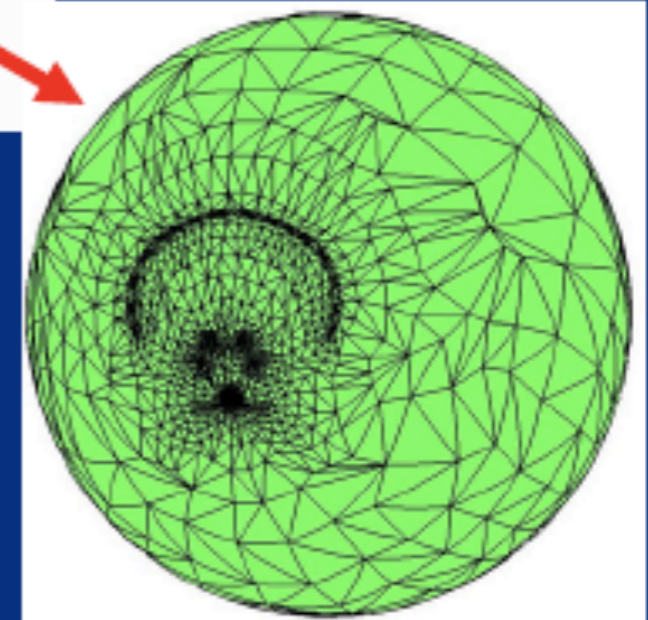


Esfera Unitária



Traditional:
Cut & parameterize
in 2D

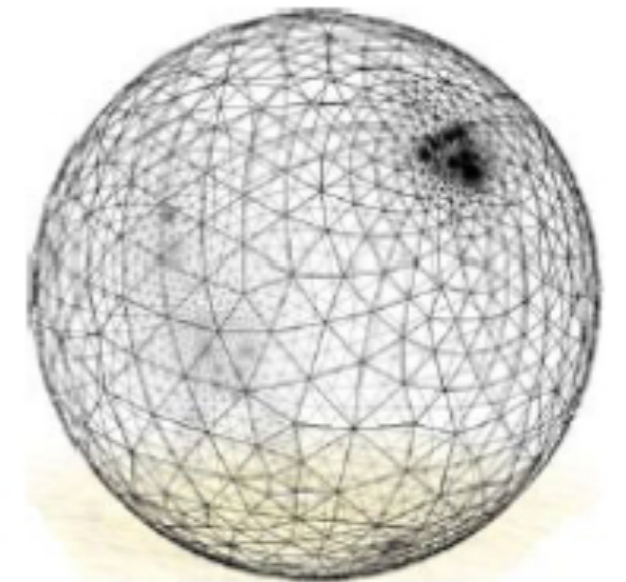
- Why?
- Global Continuity
 - No cross-boundary discontinuities



Alternative:
Parameterize
on sphere

Esfera Unitária

- [Isenburg et al. 2001]
 - Dividir a malha em dois segmentos
 - Mapear cada segmento em um hemisfério (Tutte modificado e Gauss-Seidel)
 - Método diverge próximo a solução bijetiva



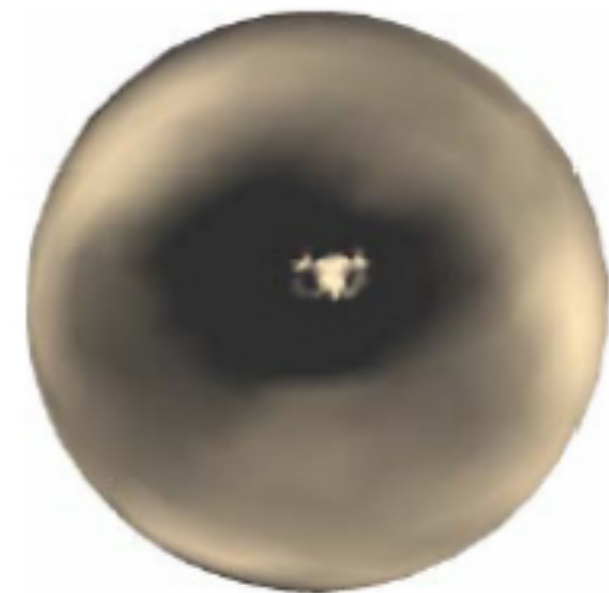
Esfera Unitária

- Projeção estereográfica: [Haker et al. 2000]
 1. Definir um triângulo como bordo da malha (topologia de disco)
 2. Parametrizar a malha no plano
 3. Mapear o plano na esfera (projeção estereográfica)
- Parametrização conforme
- Não garante bijeção
- Alta distorção (de área) nos pólos



Esfera Unitária

- Coordenadas baricêntricas na esfera: [Gotsman et al. 2000]
 - Sistema de equações quadráticas
 - Solução não eficiente (não linear)
- Solução eficiente: [Saba et al. 2005]
 1. Dividir a malha em 2 segmentos [Isenburg et al. 2001]
 2. Parametrizar cada segmento em um hemisfério (chute inicial) [Haker et al. 2000]
 3. Solução final: Gauss-Seidel + otimização não-linear

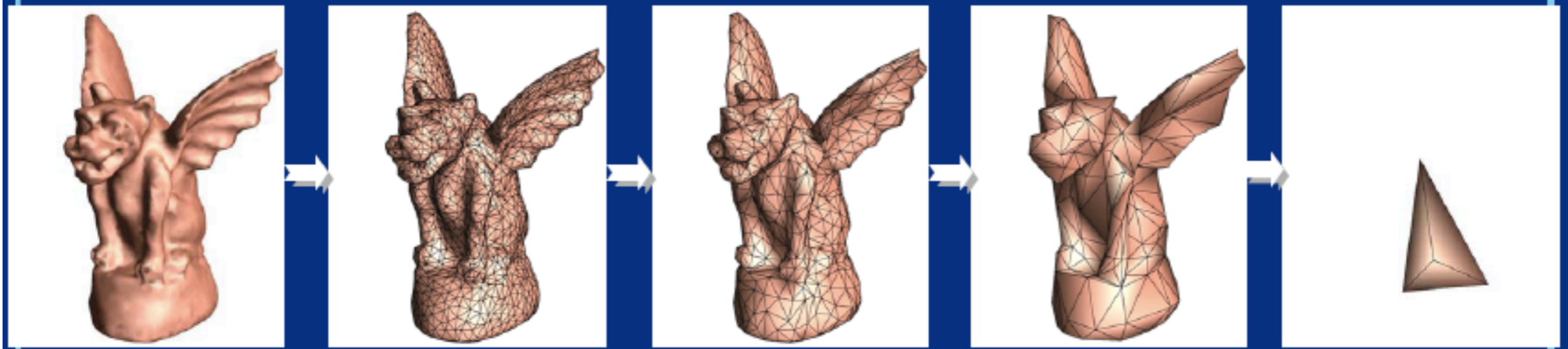


Esfera Unitária

Coarse to fine Embedding

[Shapiro & Tal:98; Praun & Hoppe:03]

- Simplify model till convex & trivially embed
 - can be embedded on sphere with no flips

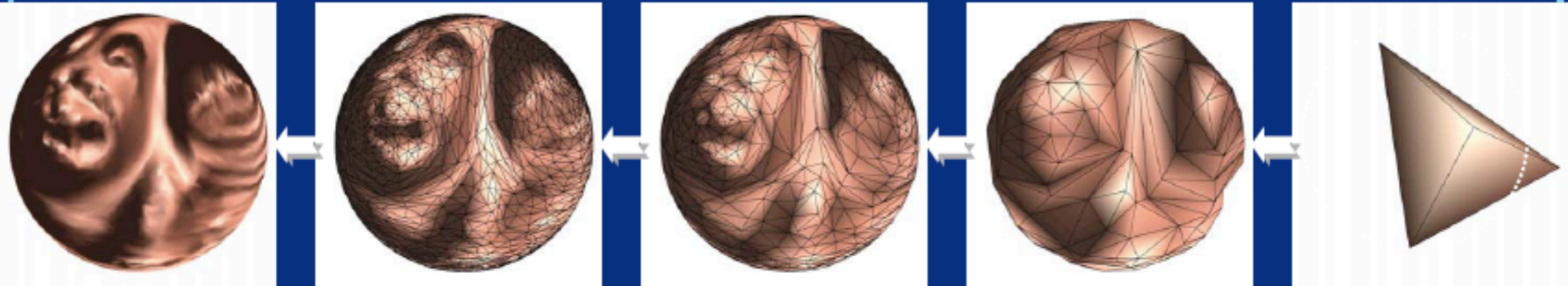


Esfera Unitária

Coarse to fine Embedding

[Shapiro & Tal:98; Praun & Hoppe:03]

- Introduce vertices back one-by-one
 - Find optimal location
 - Perform *local* smoothing [Praun & Hoppe:03]



- Works well in practice
 - Validity guaranteed
 - Fairly time consuming to get good result

Esfera Unitária: Sumário

- Gauss Seidel / Projeção Ortográfica:

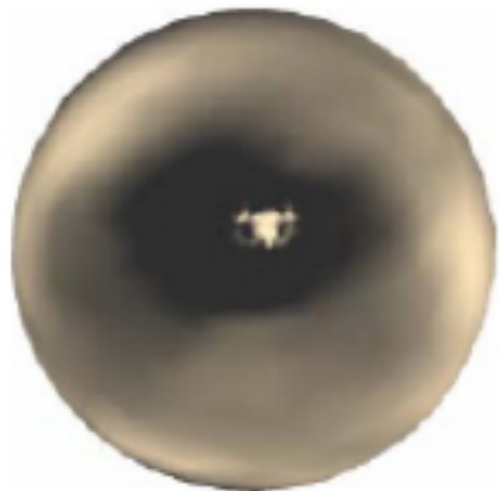
- Simples e eficiente
- Não bijetiva

- Coordenadas Baricêntricas na esfera:

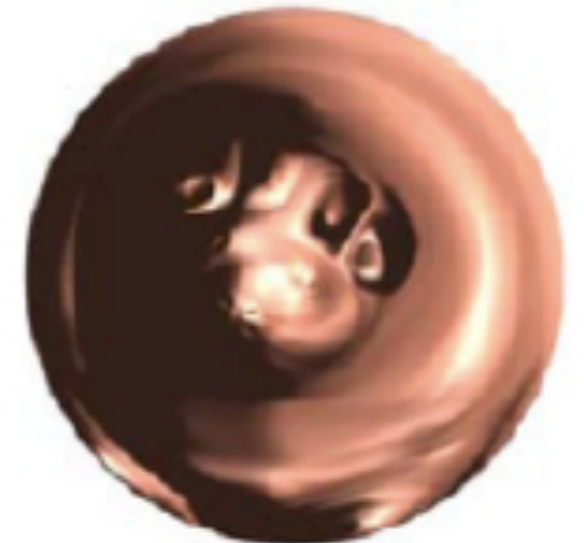
- Elegante e bijetiva
- Solver complicado

- Coarse-to-fine:

- Bijeção garantida
- trade-off: distorção / velocidade



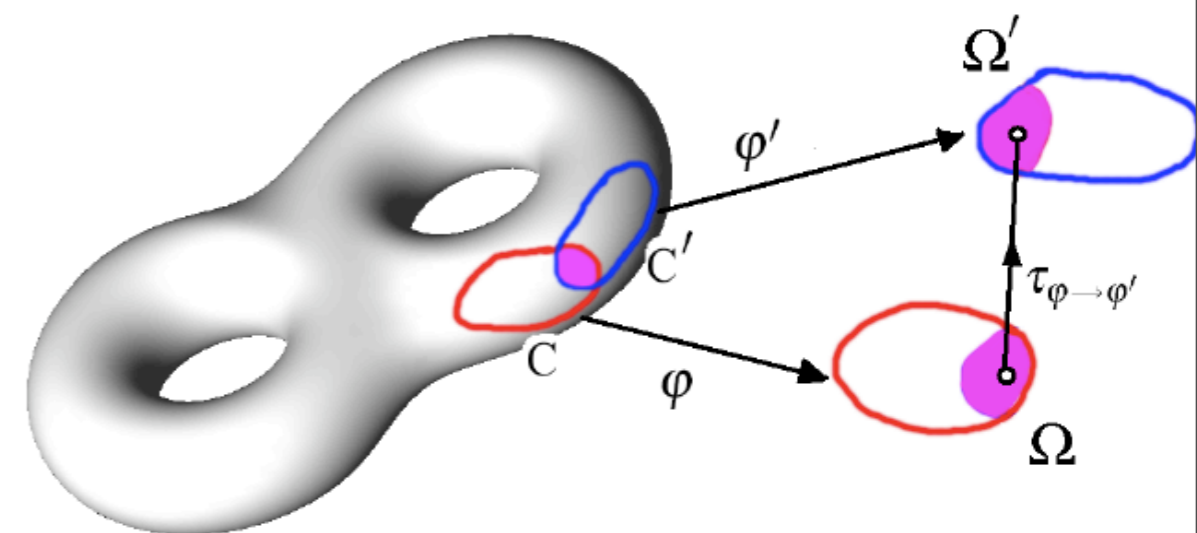
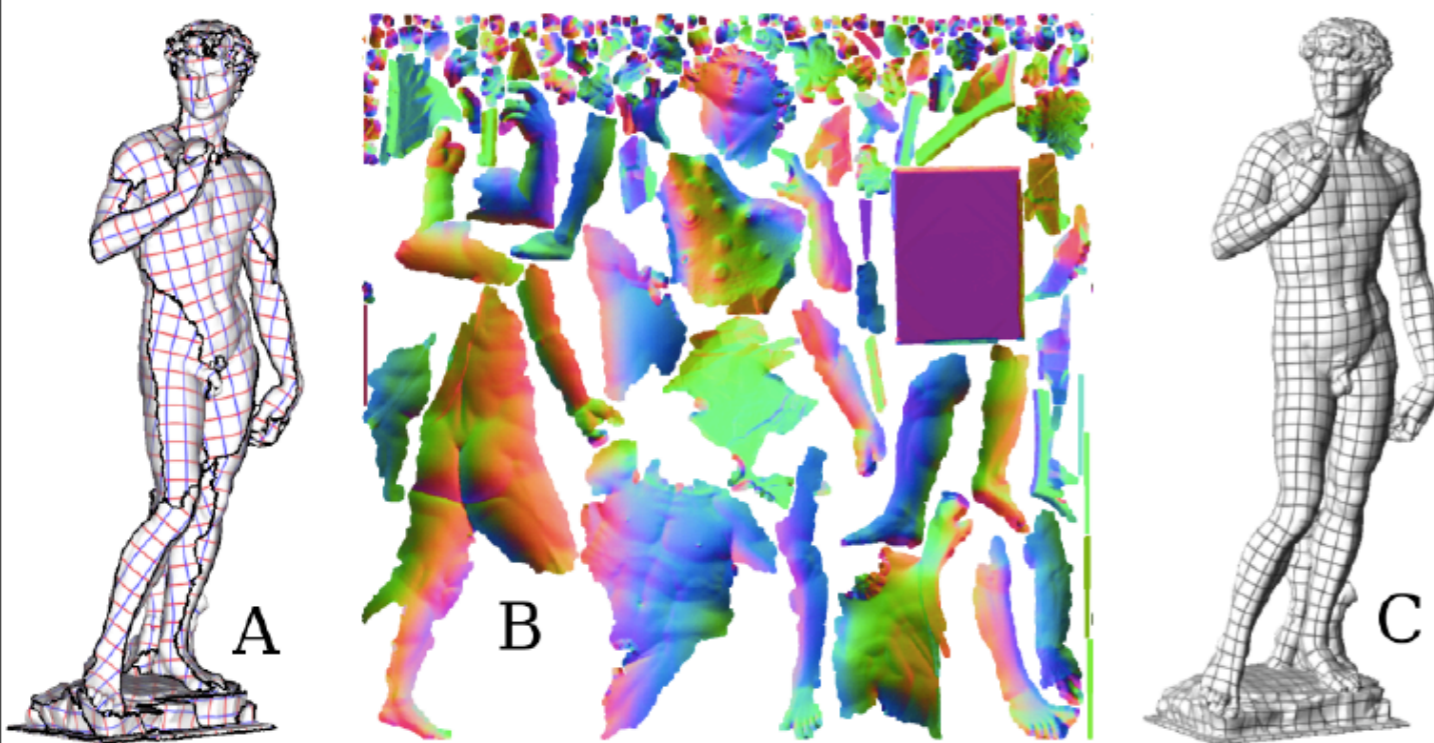
(d) [Saba et al., 2005]



(e) [Praun and Hoppe 2003]

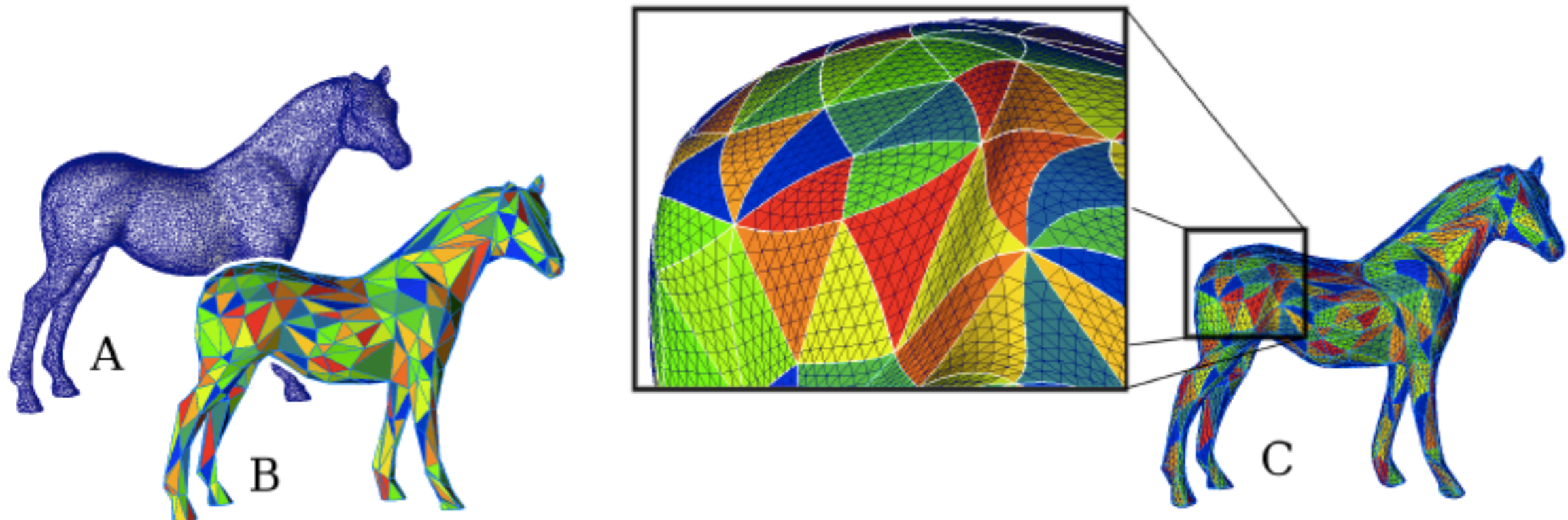
Parametrização Global

- Resolve o problema de descontinuidade entre segmentos
- Objetivo:
 - Garantir transição suave entre segmentos



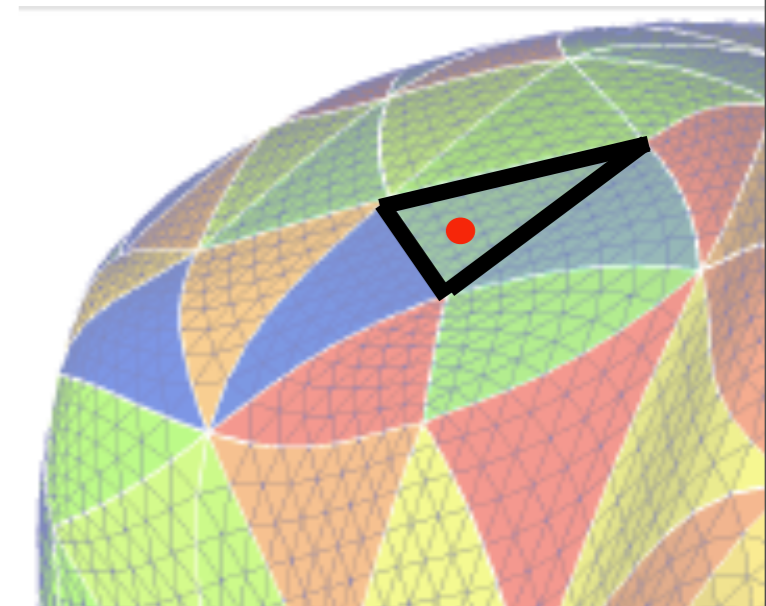
Parametrização Global

- MAPS [Lee et al. 1998]
 1. Segmentar
 2. Parametrizar
 3. Reamostrar (função de transição) [Khodakovsky et al. 2003]



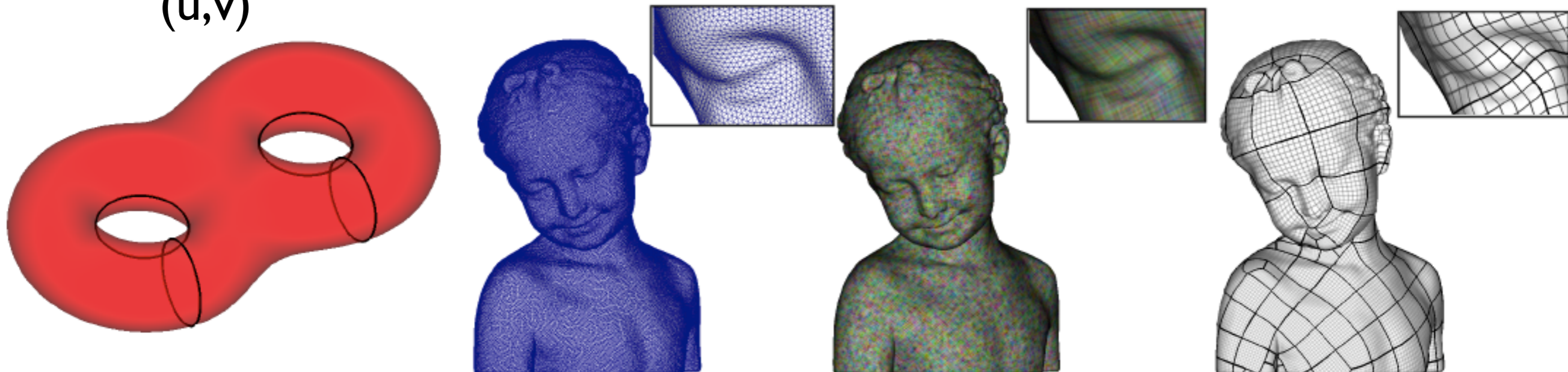
Parametrização Global

- Complexos simpliciais
 - Conectividade de uma malha (V, E, F)
 - Abordagem mais simples:
 1. Obter o complexo por simplificação da malha, guardando as correspondências entre vértices da malha e as faces da malha simplificada
 2. Calcular coordenadas baricêntricas dos vértices da malha usando seu respectivo simplexo.
Alternativa: Usar funções de transição para garantir continuidade entre simplexos.
(Relaxação e coordenadas baricêntricas de simplexos vizinhos)



Homologia e co-homologia

- [Gu and Yau, 2003]: Parametrização global conforme em superfícies de gênero arbitrário com poucos pontos singulares
 1. Calcular uma base de homologia (Erickson's method)
 2. Deduzir uma base de co-homologia (campos vetoriais)
 3. Extrair desta base um par de 1-formas harmônicas conjugadas
 - Cada classe de co-homologia contém uma única 1-forma harmônica
 - Funções harmônicas \Rightarrow conformidade
 4. Integrar as 1-formas (du, dv) para encontrar a parametrização (u, v)

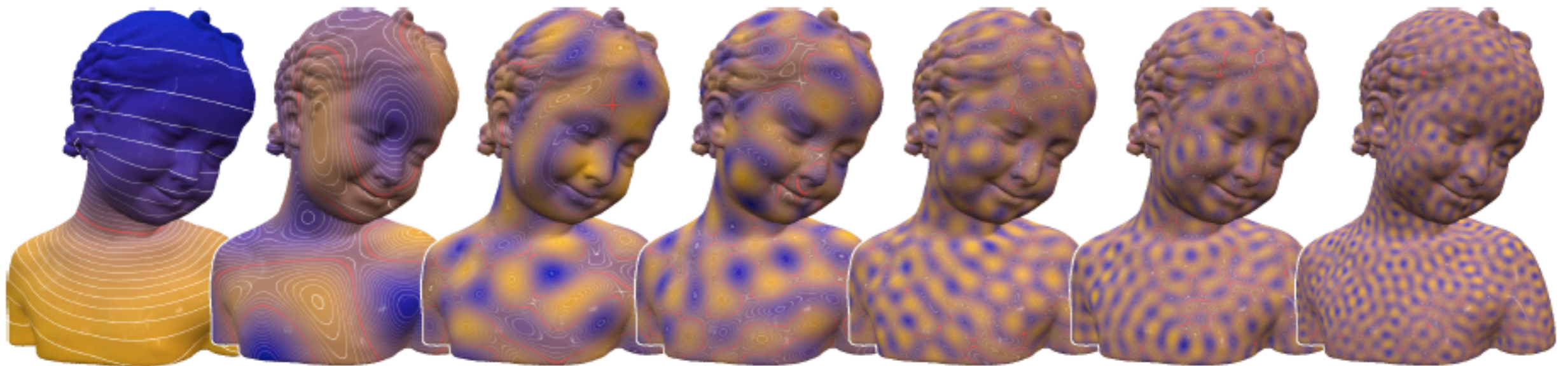


Métodos espectrais

- Operador de Laplace-Beltrami e autofunções

$$\Delta = \text{div grad} = \delta d = \sum_i \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Delta f = \lambda f$$



autofunções

Métodos espectrais

- [Dong et al. 2005]
 - A. Calcular uma autofunção f
 - B. Extrair o complexo de Morse de f
 - C. Suavizar
 - D. Particionar a malha em quads

