Estimativa do Vetor Normal Afim em Superfícies Discretas

Maria Andrade (UFAL)

Trabalho em andamento com Nayane Freitas, Dimas Martínez,Thales Vieira (UFAL) e

Thomas Lewiner (PUC-Rio)

IMPA - Verão - 2015

5 de fevereiro de 2015

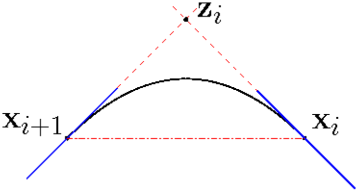


Figura: Pontos e retas tangentes(Lewiner et al.)

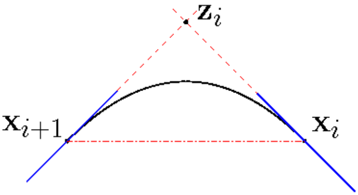


Figura: Pontos e retas tangentes(Lewiner et al.)

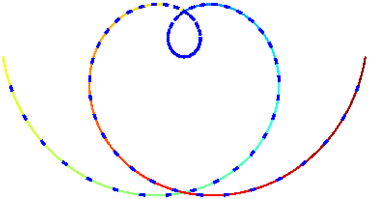


Figura: Reconstrução afim(Lewiner et al.)

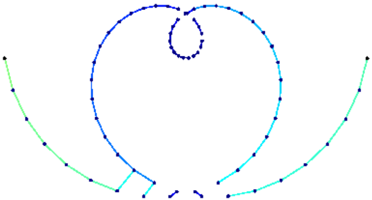
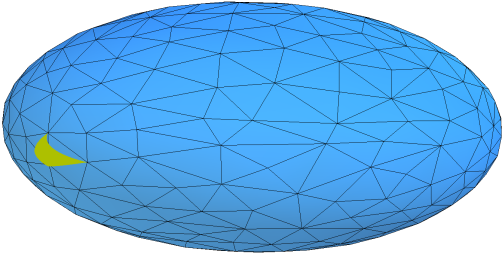
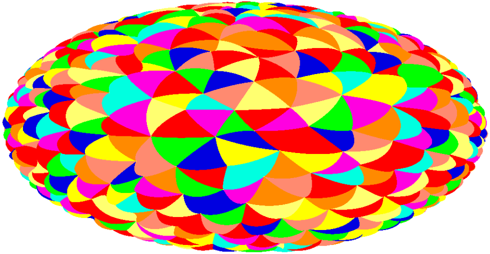


Figura: Reconstrução Euclideana (Lewiner et al.)

Em superfícies, como tratamos deste problema? "Dados três pontos e três planos tangentes definido nestes pontos, é possível encontrarmos um parabolóide que passa por estes pontos, e estes planos sejam tangentes?"

Utilizar Retalhos Triangulares de Bézier Quadráticos com a Geometria Afim.





De acordo com Felix Klein (1872),

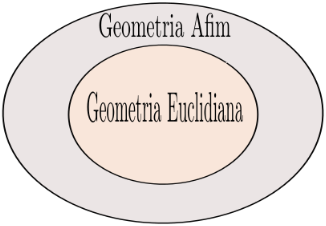
Geometria Euclidiana: é o estudo de invariantes em relação ao grupo dos movimentos rígidos.

Geometria Afim: é o estudo de invariantes em relação ao grupo de transformações afins.

De acordo com Felix Klein (1872),

Geometria Euclidiana: é o estudo de invariantes em relação ao grupo dos movimentos rígidos.

Geometria Afim: é o estudo de invariantes em relação ao grupo de transformações afins.



Definição: Sejam S um objeto geométrico e G um grupo de transformações associadas a uma geometria. Dizemos que uma medida geométrica m é *invariante* pelo grupo G se $\forall S,\ \forall A \in G$, $m(A(S)) = m(S)$, *covariante* se $m(A(S)) = A(m(S))$ e *contravariante* se $m(A(S)) = A^{-T}(m(S))$.

Transformação Afim

Definição: Uma transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é afim se T preserva combinação afim de pontos, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \Rightarrow T\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i P_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(P_i),\ a_i \in \mathbb{R},\ P_i \in \mathbb{R}^3.$$

Definição: Uma transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é afim se T preserva combinação afim de pontos, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \Rightarrow T\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i P_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(P_i),\ a_i \in \mathbb{R},\ P_i \in \mathbb{R}^3.$$

A transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é afim se, e somente se, T é da forma $T(u) = L(u) + v_0$, onde L é linear e $v_0 \in \mathbb{R}^3$.

Dada a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ da superfície regular S, a métrica de **Berwald-Blaschke** é dada por:

$$ds^2 = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{\mid LN - M^2 \mid^{1/4}},$$

onde, $L = [X_u, X_v, X_{uu}]$, $M = [X_u, X_v, X_{uv}]$ e $N = [X_u, X_v, X_{vv}]$ são tais que o coeficiente da métrica, $d = LN - M^2$, é diferente de zero.

Definição: A Primeira Forma Fundamental Afim é a aplicação definida por:

$$I_a = \sum_{i,j=u,v} g_{ij} di dj,$$

onde $g_{uu} = \dfrac{L}{\mid LN - M^2 \mid^{1/4}}$, $g_{uv} = g_{vu} = \dfrac{M}{\mid LN - M^2 \mid^{1/4}}$, $g_{vv} = \dfrac{N}{\mid LN - M^2 \mid^{1/4}}$.

Relação entre os coeficientes da Primeira Forma Fundamental Afim com a Segunda Forma Fundamental Euclidiana

Sejam $l_{i,j}$, os coeficientes da Segunda Forma Fundamental Euclidiana, temos:

$$l_{ij} = < N_e, X_{ij} > = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{ij} \right\rangle = \frac{[X_u, X_v, X_{ij}]}{\|X_u \times X_v\|},$$

Relação entre os coeficientes da Primeira Forma Fundamental Afim com a Segunda Forma Fundamental Euclidiana

Sejam $l_{i,j}$, os coeficientes da Segunda Forma Fundamental Euclidiana, temos:

$$l_{ij} = < N_e, X_{ij} > = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{ij} \right\rangle = \frac{[X_u, X_v, X_{ij}]}{\|X_u \times X_v\|},$$

ou seja:

$$l_{uu} = \frac{L}{\|X_u \times X_v\|}, \; l_{uv} = l_{vu} = \frac{M}{\|X_u \times X_v\|}, \; l_{vv} = \frac{N}{\|X_u \times X_v\|}.$$

Relação entre os coeficientes da Primeira Forma Fundamental Afim com a Segunda Forma Fundamental Euclidiana

Portanto:

$$K_e = \frac{det(l_{i,j})}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{\|X_u \times X_v\|^4}.$$

Relação entre os coeficientes da Primeira Forma Fundamental Afim com a Segunda Forma Fundamental Euclidiana

Portanto:

$$K_e = \frac{det(l_{i,j})}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{\|X_u \times X_v\|^4}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} K_e > 0 &\iff d > 0 \\ K_e < 0 &\iff d < 0 \\ K_e = 0 &\iff d = 0 \end{aligned}$$

Vetores Conormal e Normal Afins em Superfícies Regulares

Vetores Conormal e Normal Afins em Superfícies Regulares

Afirmação: N_e não é contravariante por transformações equiafins.

Vetores Conormal e Normal Afins em Superfícies Regulares

Seja S uma superfície regular e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S. Dada a matriz $A \in M(3)$ com $det(A) = 1$, tomando $p \in S$ temos que:

$$\begin{aligned} N_e(A(p)) &= \frac{X_u(A(p)) \times X_v(A(p))}{\|X_u(A(p)) \times X_v(A(p))\|} \\ &= \frac{A(X_u(p)) \times A(X_v(p))}{\|A(X_u(p)) \times A(X_v(p))\|} \\ &= \frac{A^{-T}(X_u \times X_v)(p)}{\|A^{-T}(X_u \times X_v)(p)\|} \\ &= \frac{1}{\|A^{-T}N_e(p)\|} A^{-T} N_e(p). \end{aligned}$$

O vetor **conormal afim** é definido pela seguinte expressão:

$$\nu = \mid K_e \mid^{-1/4} N_e.$$

Vetores Conormal e Normal Afins em Superfícies Regulares

O vetor **conormal afim** é definido pela seguinte expressão:

$$\nu = \mid K_e \mid^{-1/4} N_e .$$

Propriedade: A métrica afim satisfaz $d^{1/4} = \pm[\nu,\ \nu_u,\ \nu_v]$, onde o sinal $\pm$ depende se o ponto é elíptico ou hiperbólico.

Como $[\nu,\ \nu_u,\ \nu_v] = d^{1/4} \neq 0$, então, as derivadas $\nu_{\{u,v\}}$ definem um plano em todo ponto p. O **vetor normal afim** ξ pode ser obtido através do vetor ortogonal ao plano gerado por ν_u e ν_v, podendo ser definido localmente pela relação:

$$< \nu,\ \xi > = 1,\ < \xi,\ \nu_u > = < \xi,\ \nu_v > = 0.$$

Como $<\nu,\ \xi>=1,\ <\xi,\ \nu_u>=0$ e $<\xi,\ \nu_v>=0$ então existe uma função $\lambda : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$\xi = \lambda(\nu_u \times \nu_v).$$

Assim,

$$<\nu, \xi> = \ \lambda[\nu, \nu_u, \nu_v] \ \Rightarrow \ 1 = \pm\lambda d^{\frac{1}{4}} \ \Rightarrow \ \lambda = \mid d \mid^{-\frac{1}{4}} \ .$$

Vetores Conormal e Normal Afins em Superfícies Regulares

Afirmação: Os vetores conormal e normal afins são, respectivamente, contravariantes e covariantes por transformações equiafins.

Afirmação: Os vetores conormal e normal afins são, respectivamente, contravariantes e covariantes por transformações equiafins.

isto é, dada uma matriz $A \in M(3)$, com $det(A) = 1$, temos:

$$\nu(A(p)) = A^{-T}(\nu(p)) \text{ e } \xi(A(p)) = A(\xi(p))$$

Retalho Triangular de Bézier

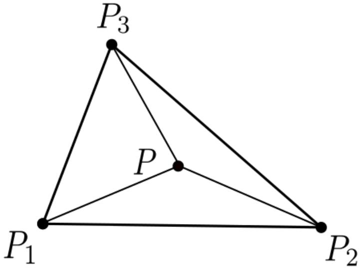
- Coordenadas Baricêntricas

- Coordenadas Baricêntricas

Dados três pontos, não colineares, P_1, P_2 e P_3 em $\mathbb{R}^d$, qualquer ponto P do plano definido por eles pode ser expresso como:

$$P = uP_1 + vP_2 + wP_3,$$

onde os escalares u, v e w são chamados de *coordenadas baricêntricas* de P e são tais que $u + v + w = 1$



$$u = \frac{\textit{área}(P, P_2, P_3)}{\textit{área}(P_1, P_2, P_3)}, \quad v = \frac{\textit{área}(P_1, P, P_3)}{\textit{área}(P_1, P_2, P_3)}, \quad w = \frac{\textit{área}(P_1, P_2, P)}{\textit{área}(P_1, P_2, P_3)}.$$

- Polinônimos de Bernstein

- Polinônimos de Bernstein

Definição: Os polinômios de Bernstein, $B_{i,j,k} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de grau n são definidos como:

$$B^n_{ijk}(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k,$$

com $i, j, k \geqslant 0$ tal que $i + j + k = n$.

- Polinônimos de Bernstein

Definição: Os polinômios de Bernstein, $B_{i,j,k} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de grau n são definidos como:

$$B^n_{ijk}(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k,$$

com $i, j, k \geqslant 0$ tal que $i + j + k = n$.

Notação: $B^n_{ijk}(u, v, w) = B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$, onde $\mathbf{i} = (i, j, k) \in \{0, 1, \ldots, n\}^3$, $| \mathbf{i} | = i + j + k = n$ e $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

Propriedades dos Polinômios de Bernstein

(i) São linearmente independentes;
(ii) Formam uma base para o espaço de polinômios de grau $\leq n$;
(iii) Formam uma partição da unidade

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^{n}(\mathbf{u}) = 1;$$

(iv) São positivos para $\mathbf{u} > 0$;

Representação de Bézier de Retalhos Triangulares

Toda superfície polinômica $b(\mathbf{u})$ tem uma única representação de Bézier,

$$b(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^{n}(\mathbf{u})$$

com respeito a um triângulo de referência $T(a_0, a_1, a_2)$.

Representação de Bézier de Retalhos Triangulares

Toda superfície polinômica $b(\mathbf{u})$ tem uma única representação de Bézier,

$$b(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^{n}(\mathbf{u})$$

com respeito a um triângulo de referência $T(a_0, a_1, a_2)$.

Quantidade de vértices da malha é dada por $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Representação de Bézier de Retalhos Triangulares

Definimos a representação de Bézier $b(\mathbf{u})$, como a parametrização $\varphi : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de um retalho triangular de Bézier, ou seja,

$$\varphi(x, y) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}),$$

com $\mathbf{u} = (x, y, 1 - x - y)$.

Representação de Bézier de Retalhos Triangulares

Definimos a representação de Bézier $b(\mathbf{u})$, como a parametrização $\varphi : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de um retalho triangular de Bézier, ou seja,

$$\varphi(x, y) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}),$$

com $\mathbf{u} = (x, y, 1 - x - y)$.

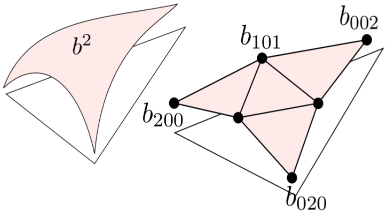


Figura: Retalho quadrático de Bézier junto a sua malha de controle.

Propriedades dos Retalhos Triangulares de Bézier

(i) φ é uma combinação afim de pontos de Bézier. Consequentemente, **é covariante por transformações afins**.

(ii) Para todo $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$, $\varphi(u)$ é uma combinação convexa dos pontos de Bézier $b_{\mathbf{i}}$ (pois os polinômios de Bernstein são não negativos sobre T). Portanto, sua imagem satisfaz a propriedade do fecho convexo.

(iii) A fronteira da imagem de φ são Curvas de Bézier, logo interpola os extremos da sua malha de controle.

Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático

Uma parametrização $\varphi : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, de um retalho triangular de Bézier quadrático pode ser dada por:

$$\varphi(x,y) = \sum_{|\mathbf{i}|=2} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^2(\mathbf{u})$$

onde $\mathbf{i} = (i,j,k)$ são inteiros não-negativos, tais que, $i+j+k=2$.

Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático

Como $|\ \mathbf{i}\ | = 2$, então,

$$i \in \{(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático

Como $|\ \mathbf{i}\ | = 2$, então,

$$i \in \{(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

Sabendo que $B^2_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \dfrac{2!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$, temos:

$$\begin{aligned} B^2_{200}(\mathbf{u}) &= u^2 \qquad & B^2_{110}(\mathbf{u}) = 2uv \\ B^2_{020}(\mathbf{u}) &= v^2 \qquad & B^2_{101}(\mathbf{u}) = 2uw \\ B^2_{002}(\mathbf{u}) &= w^2 \qquad & B^2_{011}(\mathbf{u}) = 2vw. \end{aligned}$$

Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático

Tomando uma malha de contole $\{b_{200}, b_{020},\ b_{002}, b_{110}, b_{101}, b_{011}\}$ e $\mathbf{u} = (x, y, 1 - x - y)$ temos:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \sum_{|\mathbf{i}|=2} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^2(\mathbf{u}) \\ &= ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f.\end{aligned}$$

Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático

Tomando uma malha de contole $\{b_{200}, b_{020},\ b_{002}, b_{110}, b_{101}, b_{011}\}$ e $\mathbf{u} = (x, y, 1-x-y)$ temos:

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \sum_{|\mathbf{i}|=2} b_{\mathbf{i}} B^2_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \\ &= ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f. \end{aligned}$$

onde, os vetores $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^3$, são:

$a = b_{200} + b_{002} - 2b_{101};$

$b = b_{020} + b_{002} - 2b_{011};$

$c = 2(b_{002} - b_{011} - b_{101} + b_{110});$

$d = 2(b_{101} - b_{002});$

$e = 2(b_{011} - b_{002});$

$f = b_{002}.$

Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático

Afirmação: O retalho triangular de Bézier quadrático é um parabolóide (**FARIN**)

Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático

Afirmação: O retalho triangular de Bézier quadrático é um parabolóide (**FARIN**)

Portanto, em $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$, temos:

$$\xi_R = \mid [\nu(0,0), \nu_x(0,0), \nu_y(0,0)] \mid^{-1/4} (\nu_x(0,0) \times \nu_y(0,0)).$$

Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático

Em $\mathbf{u} = (0,0,1)$, temos que:

$$\nu(0,0) = \frac{1}{\mid D \mid^{1/4}}(d_2e_3 - d_3e_2, d_3e_1 - d_1e_3, d_1e_2 - d_2e_1);$$

$$\nu_x(0,0) = \frac{1}{\mid D \mid^{1/4}}(2a_2e_3 - 2a_3e_2 + d_2c_3 - d_3c_2, 2a_3e_1 - 2a_1e_3 + d_3c_1 - d_1c_3, 2a_1e_2 - 2a_2e_1 + d_1c_2 - d_2c_1);$$

$$\nu_y(0,0) = \frac{1}{\mid D \mid^{1/4}}(2d_2b_3 - 2d_3b_2 + c_2e_3 - c_3e_2, 2d_3b_1 - 2d_1b_3 + c_3e_1 - c_1e_3, 2d_1b_2 - 2d_2b_1 + c_1e_2 - c_2e_1).$$

Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático

$$\varphi_x(0,0) = (d_1, d_2, d_3);$$
$$\varphi_y(0,0) = (e_1, e_2, e_3);$$
$$\varphi_{xx}(0,0) = (2a_1, 2a_2, 2a_3);$$
$$\varphi_{yy}(0,0) = (2b_1, 2b_2, 2b_3);$$
$$\varphi_{xy}(0,0) = (c_1, c_2, c_3).$$

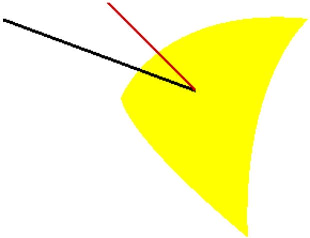
$$D = \mid \varphi_x(0,0), \varphi_y(0,0), \varphi_{xx}(0,0) \mid . \mid \varphi_x(0,0), \varphi_y(0,0), \varphi_{xy}(0,0) \mid$$
$$- \mid \varphi_x(0,0), \varphi_y(0,0), \varphi_{yy}(0,0) \mid^2$$

Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático

O normal afim em um retalho de Bézier quádratico só depende dos vértices da sua malha de controle

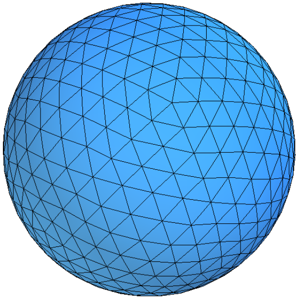
Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático

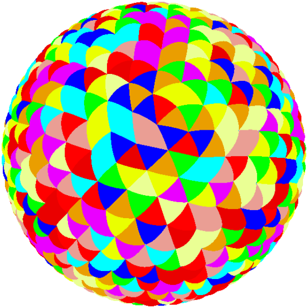
O normal afim em um retalho de Bézier quádratico só depende dos vértices da sua malha de controle



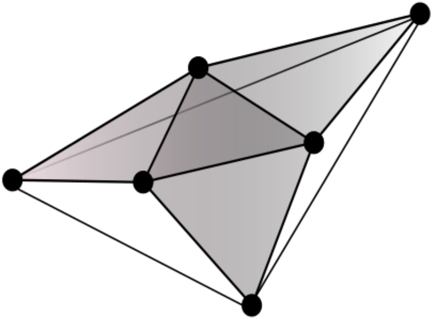
Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos

Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos



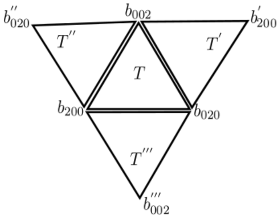


Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos



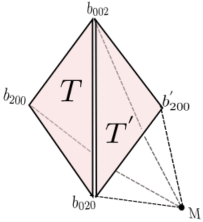
Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos

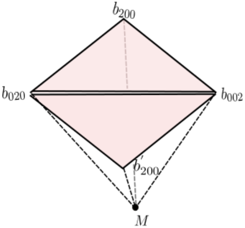
1º Passo: Dado o domínio triangular $T(b_{200}, b_{020}, b_{002})$ consideramos os seus triângulos adjacentes $T^{'}(b_{002}, b_{020}, b^{'}_{200})$, $T^{''}(b_{200}, b_{002}, b^{''}_{020})$ e $T^{'''}(b_{020}, b_{200}, b^{'''}_{002})$.



Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos

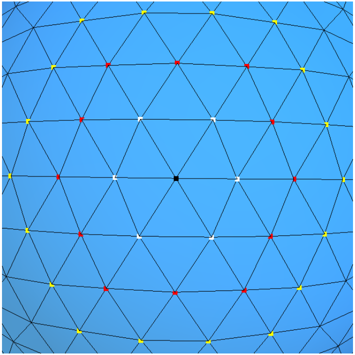
2º Passo: Para cada um dos triângulos adjacentes a T, consideramos quatros tetraedros cujos lados são triângulos formados pelos vértices das arestas de T e os vértices das aretas de um dos seus triângulos adjacentes, com o centro de massa da união das k-vizinhanças estreladas dos vértices da aresta comum.





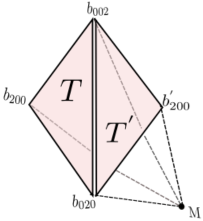
Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos

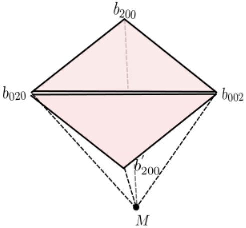
Definição: Dado um vértice v_i da malha de uma superfície, a $k-$vizinhança estrelada de v_i é o conjunto de vértices $\{v_1, \ldots v_n\}$ que está separado de v_i por exatas k arestas



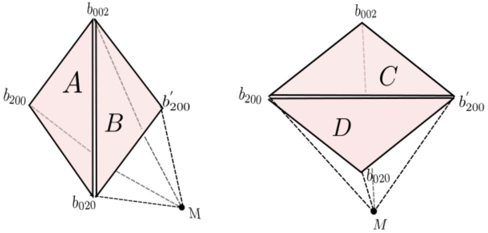
Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos

3º Passo: Para cada triângulo incidente a uma aresta de T, calculamos o quociente das somas dos volumes dos dois tetraedros cujas bases são T e um dos três triângulos adjacentes a T, pela soma dos outros dois tetradedos cujas bases são obtidas fazendo um flip na aresta comum a esses dois triângulos.





Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos

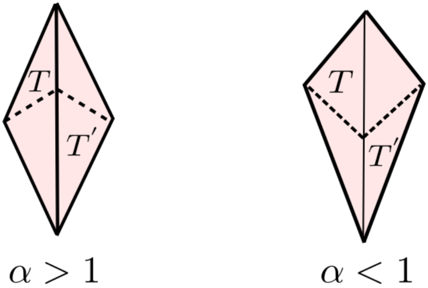


$$\alpha = \frac{Vol(A) + Vol(B)}{Vol(C) + Vol(D)}.$$

O valor de α nos dá informações sobre a concavidade do poliedro formado por T e T' .

Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos

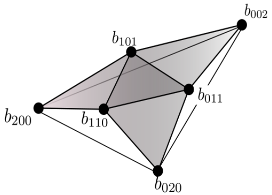
$$\alpha = \frac{Vol(A) + Vol(B)}{Vol(C) + Vol(D)}. \qquad (1)$$



Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos

4º Passo: Obtemos os outos três pontos da malha de controle dos retalhos, como:

$$b_{110} = \frac{\beta_1}{2}(b_{200} + b_{020}) + (1 - \beta_1)M^{'};$$
$$b_{011} = \frac{\beta_2}{2}(b_{020} + b_{002}) + (1 - \beta_2)M^{''};$$
$$b_{101} = \frac{\beta_3}{2}(b_{002} + b_{200}) + (1 - \beta_3)M^{'''}.$$

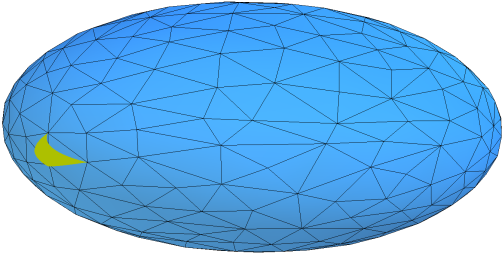


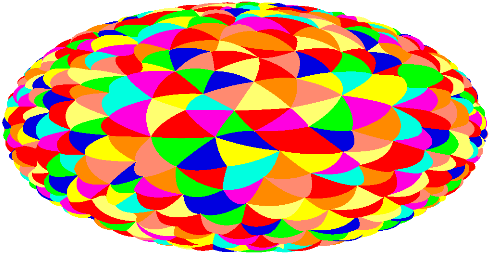
Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_i(1 + \ \epsilon), se\ \alpha_i > 1 \\ \alpha_i(1 - \ \epsilon), se\ \alpha_i < 1 \end{cases}$$

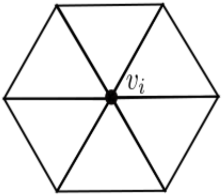
com $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}]$.

Representação de uma Superfície Discreta por Retalhos Triangulares de Bézier Quádraticos

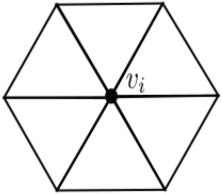




Normal Afim no Vértice da Malha Triangular de uma Superfície Discreta



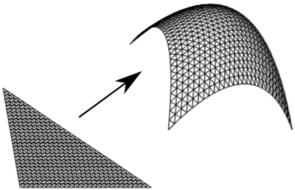
Normal Afim no Vértice da Malha Triangular de uma Superfície Discreta



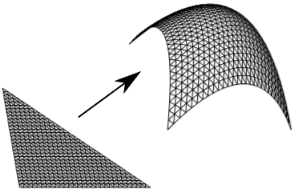
Obtemos o normal afim no vértice v_i da malha de uma superfície, como:

$$\xi_i = \frac{\sum A_{R_i} \xi_{R_i}}{\sum A_{R_i}}.$$

Normal Afim no Vértice da Malha Triangular de uma Superfície Discreta

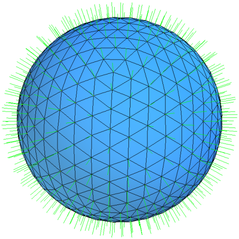


Normal Afim no Vértice da Malha Triangular de uma Superfície Discreta

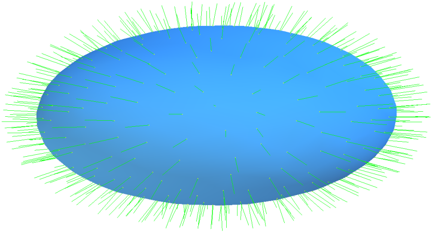


A n-partição do triângulo $T((0,0),(1,0),(0,1))$ é definida pelos pontos com coordenadas baricêntricas

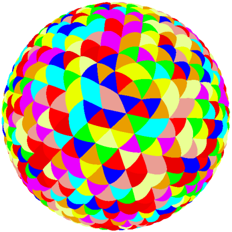
$$\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, 1 - \frac{i}{n} - \frac{j}{n}\right), \text{ com } i, j \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$



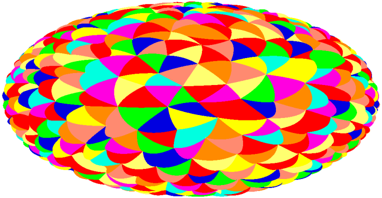
(a) Malha com 1280 triângulos.



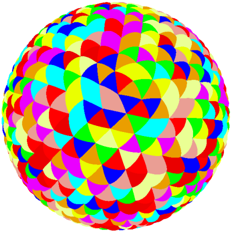
(b) Malha com 1730 triângulos.



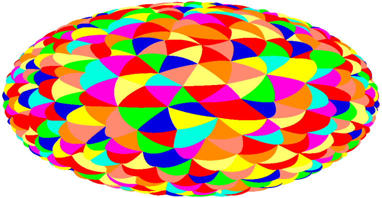
(c)



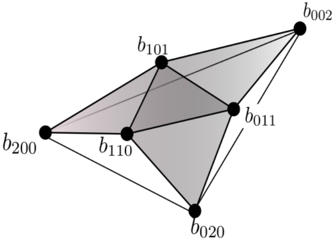
(d)

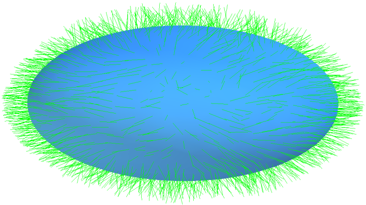


(e)

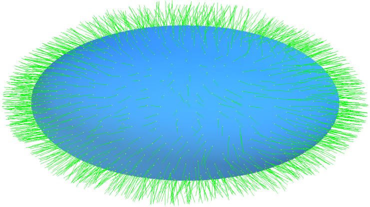


(f)

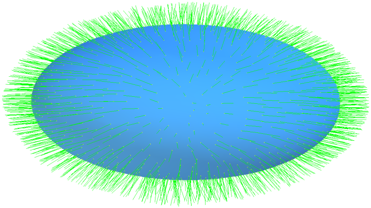




(g) 5-vizinhança.



(h) 7-vizinhança.



(i) 10-vizinhança.

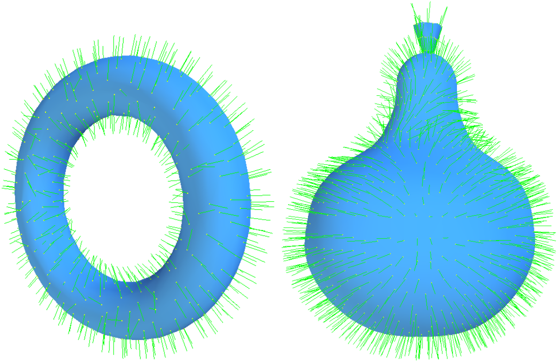
- Não encontramos uma relação entre a discretização da superfície com o tamanho necessário de vizinhanças para definir a malha de controle dos retalhos;

Limitações

- Não encontramos uma relação entre a discretização da superfície com o tamanho necessário de vizinhanças para definir a malha de controle dos retalhos;
- Restringe-se a superfícies fechadas, sem pontos planares ou parabólicos;

Limitações

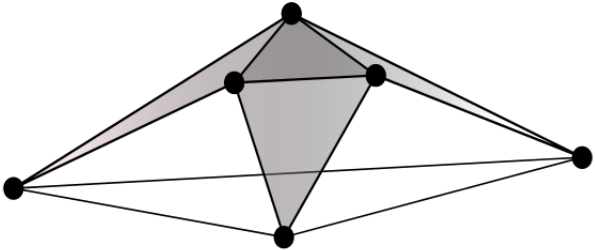
- Não encontramos uma relação entre a discretização da superfície com o tamanho necessário de vizinhanças para definir a malha de controle dos retalhos;
- Restringe-se a superfícies fechadas, sem pontos planares ou parabólicos;



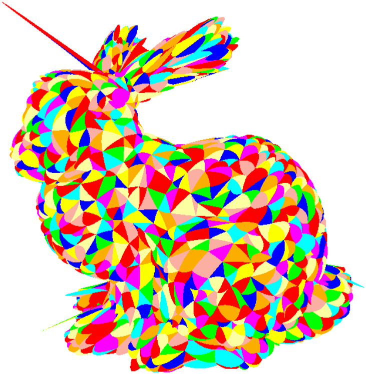
Limitações

- Evitar malhas com triângulos obtusângulos;

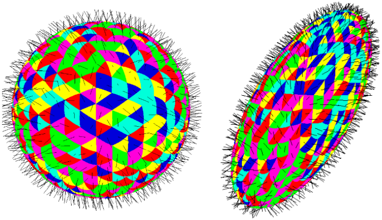
- Evitar malhas com triângulos obtusângulos;



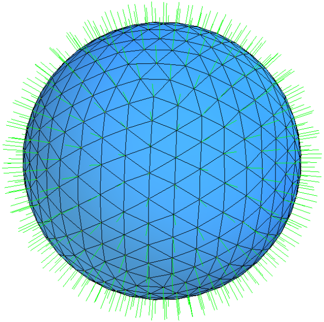
Limitações



Características Geométricas Preservadas

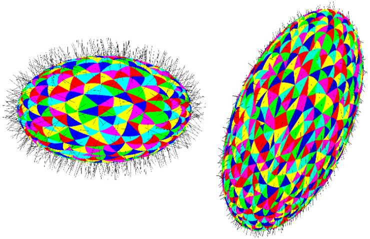


(j) Erro médio contravariância igual a $1.34288e^{-15}$

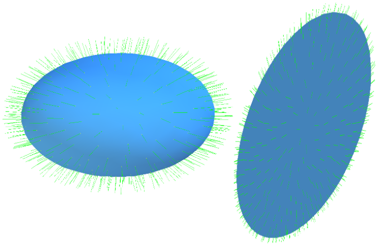


(k) Erro médio covariância igual a $8.4281e^{-15}$

Características Geométricas Preservadas

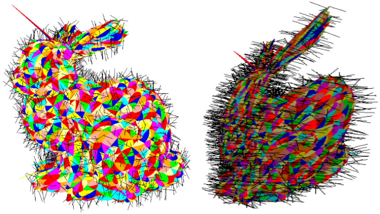


(l) Erro médio contravariância igual a $8.27393e^{-15}$

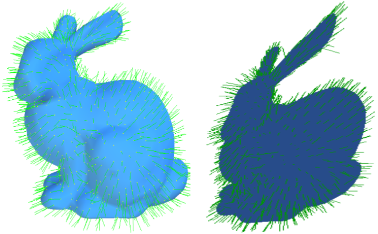


(m) Erro médio covariância igual a $6.33971e^{-14}$

Características Geométricas Preservadas



(n) Erro médio contravariância igual a $8.41602e^{-14}$



(o) Erro médio covariância igual a $3.47035e^{-11}$

Obrigada!
(maria.ufal@gmail.com)